TECHNIQUES
DE L'INGÉNIEUR

Réf. : **BM2588 V1**

Date de publication :
10 décembre 2017

Acyclisme des moteurs thermiques - Forces, couples et moments appliqués au moteur monocylindre

Cet article est issu de : **Mécanique | Machines hydrauliques, aérodynamiques et thermiques**

par **Eliau BARON, Jean-Louis LIGIER**

Mots-clés

Modélisation | vilebrequin |
acyclisme | moteur
mono-cylindre | analyse
dynamique du moteur

Résumé Cet article définit l'acyclisme de façon méthodique sur le moteur monocylindre, base à partir de laquelle peut être menée l'étude des moteurs multicylindres. Les forces, couples et moments, liés à la pression des gaz et aux inerties sont clairement explicités, l'idée étant de fournir à l'utilisateur des formules directement exploitables dans le cadre de ses activités, ceci sans avoir recours à l'approche vectorielle. Tous les développements sont accompagnés d'applications numériques et graphiques, ceci dans le but de faciliter la compréhension du lecteur et de lui donner des ordres de grandeur.

Keywords

modelling | crankshaft |
instantaneous angular speed
variations | single-cylinder
engine | dynamic analysis of
engine

Abstract This paper methodically defines acyclism for a single-cylinder engine, which is the basis for studying multi-cylinder engines. Forces, torques and moments related to combustion gas pressure and inertial effects are explained in detail. The aim of this approach is to supply ready-to-use data for engine design activities. The particularity of the approach is that the data is provided without using vectorial analysis. In order to allow a perfect mechanical feeling of each relationship, each analytical development is completed with numerical applications and figures, the aim being to provide an order of magnitude of variables, and better understanding.

Pour toute question :

Service Relation clientèle
Techniques de l'Ingénieur
Immeuble Pleyad 1
39, boulevard Ornano
93288 Saint-Denis Cedex

Par mail :

infos.clients@teching.com

Par téléphone :

00 33 (0)1 53 35 20 20

Document téléchargé le : **09/01/2018**

Pour le compte : **7200097598 - éditions ti // nc AUTEURS // 195.25.183.157**

© Techniques de l'Ingénieur | tous droits réservés

Acyclisme des moteurs thermiques

Forces, couples et moments appliqués au moteur monocylindre

par **Eliau BARON**

*Ingénieur-Docteur
Expert Chaîne Cinématique, Renault Automobiles
Guyancourt, France*

et **Jean-Louis LIGIER**

*Ingénieur-Docteur
Professeur de Mécanique
HEIG-VD, Yverdon, Suisse*

1. Définition de l'acyclisme	BM 2 588 - 2
2. Fonctionnement d'un monocylindre.....	— 2
2.1 Forces et moments des gaz.....	— 3
2.2 Forces et moments d'inertie	— 8
2.3 Effets combinés des forces, des couples et des moments des gaz et d'inertie.....	— 11
2.4 Bilan des excitations du moteur monocylindre.....	— 16
2.5 Commentaires	— 16
3. Équilibrage du moteur monocylindre	— 17
3.1 Équilibrage des masses rotatives	— 17
3.2 Équilibrage des masses alternatives	— 18
4. Conclusion	— 20
5. Glossaire	— 20
6. Symboles	— 20
Pour en savoir plus	Doc. BM 2 588

Lorsqu'il recherche la signification du terme « acyclisme » dans un dictionnaire de mots courants ou même une encyclopédie technique, l'ingénieur motoriste est étonné de ne rien trouver. En revanche, l'adjectif « acyclique » existe et qualifie un état non continu ou ne respectant pas un cycle régulier. Ainsi, « acyclisme » n'est pas français !

Nous ne soutiendrons pas que les ingénieurs sont de bons linguistes ! Mais nous savons que les phénomènes décrits par le terme « acyclisme » sont systématiquement étudiés et optimisés lors du développement d'un nouveau moteur.

Nous considérons quant à nous que l'acyclisme peut être défini comme la non-uniformité de rotation du vilebrequin pendant un cycle de fonctionnement. L'étude de ce phénomène dans les moteurs thermiques alternatifs à combustion interne consiste, d'une part à analyser les phénomènes et les mécanismes qui génèrent ou résultent de la rotation non uniforme du vilebrequin, d'autre part à étudier les moyens destinés à limiter ses effets.

L'analyse et la réduction des phénomènes de bruits et vibrations sont devenues des préoccupations essentielles pour la mise au point d'un groupe motopropulseur de véhicule automobile, de même que pour la mise au point de la caisse de ce dernier. Il est donc nécessaire de réduire autant que possible les sources d'excitations.

Pour ces différentes raisons, il nous a semblé important de formuler de façon précise l'ensemble des aspects attenants au phénomène d'acyclisme, ceci de façon progressive (notions de pression des gaz, de forces des gaz et d'inertie, de moment des gaz, de couple d'inertie...).

Ainsi, cet article traite exclusivement du moteur monocylindre à 4 temps afin de poser les bases sur lesquelles s'appuieront les développements liés aux cas des moteurs multicylindres.

Le lecteur trouvera en fin d'article un glossaire et un tableau des symboles utilisés.

1. Définition de l'acyclisme

L'acyclisme d'un moteur thermique se caractérise par les variations temporelles de déplacement, de vitesse ou d'accélération angulaire de son vilebrequin, dues aux efforts s'appliquant sur les systèmes pistons-bielles-manivelles. Suivant les cas, on quantifie l'acyclisme selon l'une de ces trois caractéristiques :

- **variations de positions angulaires**, qui peuvent permettre d'estimer les déformations et les contraintes imposées à une pièce sollicitée par les acyclismes du vilebrequin. Par ailleurs, il peut être nécessaire de considérer les déplacements angulaires vis-à-vis de systèmes filtrants lorsque ces systèmes possèdent des débattements limités ou lorsque le dépassement d'une valeur seuil est générateur de bruit (cas d'un disque d'embrayage [1]) ;

- **variations de vitesses angulaires**, dont la connaissance peut avoir différentes utilités :

- prédire des phénomènes d'amortissement en particulier lorsque ceux-ci sont importants (cas d'un démarrage par grand froid) ;
- éviter, lors d'un fonctionnement sur un régime de ralenti particulièrement bas, qu'une chute de vitesse instantanée, due à la mise en route d'un accessoire, fasse que les excitations du moteur puissent accrocher une fréquence de résonance d'un système entraîné par le vilebrequin (cas d'un double-volant amortisseur [2]) ;
- estimer le risque que de fortes variations de vitesses pendant la phase de démarrage introduisent des problèmes de détection du point mort haut par le système d'allumage (le temps de passage de la dent de référence de la cible AEI n'est plus différent du temps de passage des autres dents) ;
- évaluer l'énergie cinétique des systèmes en déplacement pour permettre d'appréhender des intensités de vibrations et, de façon plus ou moins directe, le bruit généré en cas de choc ;
- lorsque les éléments entraînés possèdent des jeux, il est parfois nécessaire d'évaluer la vitesse à laquelle le jeu est franchi pour estimer si l'impact de réception est admissible, notamment en termes de bruit ;

- **variations d'accélération angulaires**, qui peuvent permettre de quantifier les moments de torsion ou les contraintes induites dans les liaisons d'une pièce avec le vilebrequin (cas du serrage du volant d'inertie sur le vilebrequin).

Compte-tenu de la définition donnée ci-dessus, l'acyclisme peut englober **différents phénomènes bien identifiés**, parmi lesquels :

- l'irrégularité de combustion, c'est-à-dire les écarts de pression de combustion des gaz entre les cylindres qui créent ce phénomène ;

- l'irrégularité cyclique créée par des dispersions de masses alternatives entre cylindres (phénomène significatif à haut régime) ;

- l'instabilité de ralenti qui provoque des variations de rotation importantes d'un cycle à l'autre ;

- le « pompage », proche de l'instabilité de ralenti, qui provoque des variations du régime de ralenti sur des durées plus longues (supérieures à 1 s, cas d'une prise d'air mal contrôlée sur l'admission pour un moteur à allumage commandé [3]) ;

- les phénomènes de balourd (volant mal équilibré, friction d'embrayage mal centrée ou mésalignement entre arbre primaire de boîte et vilebrequin) ;

- les phénomènes de résonance en torsion, les vibrations dynamiques appliquées au vilebrequin peuvent exciter son premier mode de résonance en torsion, les perturbations induites peuvent notamment s'observer au niveau de la poulie d'accessoire, lorsqu'il n'y a pas d'amortisseur de torsion (amortisseur de Frahm).

Dans le cas où l'on veut faire seulement une analyse du fonctionnement de l'attelage mobile (piston, bielle, vilebrequin, volant), il est nécessaire de différencier les différences irrégularités de rotation. Ainsi, pour les moteurs constitués de n cylindres, l'acyclisme que l'on pourrait qualifier de « naturel » est défini comme étant uniquement produit par la combinaison des acyclismes déphasés des n systèmes semblables piston-bielle-manivelle.

À titre indicatif, l'acyclisme exprimé en vitesse pour un moteur à essence est de l'ordre de 30 tr.min^{-1} et de 100 tr.min^{-1} pour un moteur de type Diesel, ceci pour une vitesse de rotation de l'ordre de $1\,000 \text{ tr.min}^{-1}$ et un moteur en condition de pleine charge.

Dans la suite de cet article, le terme « acyclisme » correspondra à l'acyclisme naturel sauf cas explicite.

2. Fonctionnement d'un monocylindre

Le Groupe Moto-Propulseur (GMP) est soumis à deux types de sollicitations, celles issues du cycle de combustion des gaz et celles liées aux phénomènes d'inertie.

Les gaz dans un cylindre produisent une pression variable au cours du cycle, qui, à l'instant de la combustion, génère un effort

Figure 1 – GMP sur ses tampons

dit « **effort des gaz** » sur le piston, effort qui est la cause des déplacements de celui-ci et de la motricité du moteur. De même, les pièces en mouvement (piston, bielle...), qui sont soumises, par le biais du système bielle/manivelle, à des accélérations, subissent des efforts dits « **efforts d'inertie** ».

Les efforts généralisés, qui représentent les résultantes des forces et des moments des forces lorsqu'ils sont appliqués au groupe moto-propulseur, permettent d'évaluer les mouvements de ce dernier sur ses tampons et le mouvement de rotation du vilebrequin. La figure 1 montre le GMP et ses liaisons avec le châssis (supports-moteur et boîte de vitesses, bielle de reprise de couple). Comme le mouvement de rotation du vilebrequin n'est pas constant, mais présente des variations cycliques, on parle d'« **irrégularités de rotation** » ou d'« **acyclisme** » en jargon de motoriste.

Afin de permettre au lecteur d'avoir une vision claire de ces phénomènes, l'explication et la mise en équations de ceux-ci s'effectueront en trois étapes distinctes :

- forces et moments (couples) dus à la pression des gaz ;
- forces et moments (couples) dus aux effets inertiels ;
- effets combinés des sollicitations des gaz et des inerties.

Signalons au passage que l'on parlera de **couple** lors d'une sollicitation appliquée au vilebrequin, et de **moment** lors d'une sollicitation appliquée au GMP.

La démarche d'analyse des irrégularités des moteurs thermiques alternatifs à combustion interne sera appliquée tout d'abord au cas d'un moteur monocylindre. Ce type de moteur constitue la base à partir de laquelle l'analyse des moteurs multicylindres peut être abordée.

Dans l'étude qui suit, on considère un monocylindre du type de ceux qui composent les moteurs à combustion interne à 4 temps et le GMP, indéformable, qui peut se mouvoir selon trois translations (dans les directions Ox , Oy et Oz) et trois rotations autour des axes Ox , Oy et Oz . La figure 2 résume la situation des différents mouvements dans le système d'axes utilisé par les constructeurs automobiles européens. L'axe Oz est orienté selon l'axe des fûts et l'axe Ox , selon l'axe de rotation du vilebrequin (pour un moteur en V, l'axe Oz se situe dans le plan médian entre les deux rangées de cylindres).

Les appellations des différents mouvements du GMP portées sur la figure sont celles qui sont les plus utilisées en pratique. Il est à noter que le roulis est intimement lié aux acyclismes.

Figure 2 – Mouvements du GMP

Afin d'être proche des modes usuels de raisonnement des ingénieurs en milieu industriel, nous avons volontairement choisi des mises en équation faciles à lire et d'un formalisme mathématique réduit. Cette façon de procéder évite de recourir à des mises en équations vectorielles, relativement lourdes à lire, et permet de ne conserver que le nom des variables clés. En pratique, cela se traduit par l'utilisation de quelques sollicitations parfaitement connues des ingénieurs motoristes, comme par exemple l'effort de la poussée des gaz. Ces différentes sollicitations sont rappelées ci-après.

2.1 Forces et moments des gaz

La pression P régnant dans la chambre de combustion induit des forces et des moments qui s'appliquent sur le bloc moteur et sur le vilebrequin (couple moteur) :

- F_g : force due à la poussée des gaz appliquée à la culasse, cette force correspond aussi à celle appliquée par la poussée des gaz sur la face « feu » du piston ;
- M_g : moment dû à la poussée latérale du piston sur le bloc moteur ;
- C_{vg} : couple moteur dû à la poussée des gaz appliqué au vilebrequin par le biais de la bielle et du piston.

On peut d'autre part déterminer en fonction de l'angle vilebrequin la force F_{bg} appliquée à la bielle, ainsi que la force transversale F_{tg} appliquée sur la chemise par le piston (§ 2.1.2).

2.1.1 Pression des gaz dans un cylindre

La pression des gaz P dans un cylindre est variable au cours du cycle de fonctionnement du moteur.

D'une façon générale, il faut savoir qu'il existe des dispersions d'un cycle à l'autre, mais aussi d'un cylindre à l'autre en termes de pression. Toutefois, dans le cas de l'analyse au premier ordre des phénomènes d'acyclisme, on peut éviter de considérer l'ensemble des courbes de pression de chacun des cylindres du moteur.

En général, on utilise une courbe de pression moyennée sur plusieurs cycles et plusieurs cylindres. La figure 3 donne un exemple de diagrammes de pressions relatives par rapport à la pression atmosphérique à pleine charge pour deux régimes différents du moteur diesel considéré : $N = 1\,000 \text{ tr.min}^{-1}$ et $N = 4\,500 \text{ tr.min}^{-1}$.

Le diagramme de la figure 3 ainsi que les valeurs numériques associées à titre d'exemple serviront de base pour calculer les forces et les moments liés à la combustion.

Sans entrer dans le détail, rappelons que la pression maximale relevée dans le cylindre dépend moins du régime moteur que de l'état de charge de celui-ci. Elle est fonction également du type de moteur : elle sera plus élevée en moteur Diesel qu'en moteur à essence.

2.1.2 Forces des gaz appliquées au bloc moteur

La force due à la pression des gaz dans la chambre de combustion, et que nous appellerons F_g , s'applique sur la culasse et le piston. Elle est aussi transmise au bloc-moteur par l'intermédiaire de la bielle.

Habituellement, pour étudier le comportement dynamique de la bielle et du piston, on décompose cette force F_g en deux forces au niveau de l'axe du piston : une force F_{bg} dans l'axe de la bielle et une force F_{tg} transversale au piston et créant une poussée latérale sur la chemise (figure 4). Pour le lecteur rigoureux, il convient de noter que sur cette figure, nous avons porté certains des efforts internes au système, comme la force F_{bg} comprimant la bielle. Cette représentation a pour objectif de mettre en évidence la façon dont les efforts se transmettent dans la structure du moteur.

Le segment AM représente l'entraxe de bielle dans le jargon des motoristes, A le centre du pied de bielle (axe du piston), M le centre de la tête de bielle (axe du maneton), et O l'axe des tourillons de vilebrequin.

La force F_{bg} est intégralement transmise au maneton. Elle se retrouve encore en O associée à un couple C_{vg} sur lequel nous reviendrons.

Figure 3 – Pressions dans un cylindre de moteur Diesel

Au niveau des deux paliers de ligne de vilebrequin, situés de part et d'autre du cylindre considéré, est donc appliquée non seulement la force F_g (projection de F_{bg} sur Oz), mais aussi la force F_{tg} (projection de F_{bg} sur Oy).

Finalement, les forces intérieures transmises au bloc moteur du fait de la pression des gaz sont :

- dans la direction z : $-F_g$ sur la culasse ;
 $+F_g$ sur les paliers ;
- dans la direction y : $+F_{tg}$ sur la chemise ;
 $-F_{tg}$ sur les paliers ;

ce qui donne, lorsqu'on effectue la somme des efforts appliqués sur le bloc moteur, des composantes horizontale et verticale de la résultante nulles.

Le bloc moteur est par contre soumis à un certain nombre de moments que nous allons expliciter dans la suite.

2.1.2.1 Force verticale F_g

Comme il a été montré précédemment, la force F_g est une force interne au moteur. Elle ne se retrouve pas en tant que force extérieure au moteur. Par contre, elle impose de façon cyclique une compression importante à la bielle, ainsi que des diminutions de pression de contact du joint de culasse avec la culasse et le bloc-moteur.

Figure 4 – Bilan des forces dues aux gaz

Figure 5 – Effet des gaz sur le piston

La force de compression F_g appliquée au piston est liée à la pression interne du cylindre (et donc à l'angle vilebrequin) par la formule :

$$\begin{aligned} F_g(\alpha) &= -\pi \cdot \frac{\varnothing^2}{4} \cdot (P(\alpha) - P_{sp}) \\ &= -\pi \cdot \frac{\varnothing^2}{4} \cdot P_a(\alpha) \end{aligned} \quad (1)$$

avec $\varnothing$ alésage,
 $P(\alpha)$ fonction de pression dans la chambre de combustion en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin α ,
 P_{sp} pression sous le piston, le plus souvent prise égale à la pression atmosphérique,
 $P_a(\alpha)$ pression relative des gaz dans la chambre.

Dans la suite de ce chapitre, les valeurs numériques utilisées pour calculer les forces et les moments dus au gaz et aux effets d'inertie seront les suivantes :

- alésage : $\varnothing = 76$ mm,
- course : $C = 80$ mm,
- entraxe de bielle : $L = 134$ mm,
- longueur manivelle : $R = 40$ mm,

soit un rapport $\lambda = L/R$ de l'entraxe de la bielle sur la demi-course égal à 3,35 et une cylindrée unitaire d'environ 363 cm³.

Compte-tenu de ces caractéristiques et des courbes de pression pour les deux régimes choisis (1 000 tr.min⁻¹ et 4 500 tr.min⁻¹), on obtient sur la figure 5 l'évolution de la force F_g appliquée au piston en fonction de l'angle vilebrequin. On peut y observer que la force F_g est maximum à 368°, avec une amplitude de 43 992 N pour 1 000 tr.min⁻¹ (367°/71 340 N pour 4 500 tr.min⁻¹). Généralement, la position angulaire du maximum de la pression résultante se situe entre 5° et 30° après le PMH (Point Mort Haut).

2.1.2.2 Force transversale piston F_{tg}

La force transversale F_{tg} appliquée par le piston sur la chemise est donnée par :

$$F_{tg} = -F_g \cdot \tan \beta, \tan \beta = \frac{BM}{AB}, \tan \alpha = \frac{BM}{OB} \quad (2)$$

d'où :

$$F_{tg} = -F_g \cdot \frac{BM}{AB} = -F_g \cdot \frac{OB}{AB} \cdot \tan \alpha \quad (3)$$

On a aussi :

$$AB = L \cdot \cos \beta, OB = R \cdot \cos \alpha \quad (4)$$

soit :

$$F_{tg} = -F_g \cdot \frac{R}{L} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \cdot \tan \alpha = -F_g \cdot \frac{R}{L} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \quad (5)$$

D'autre part :

$$BM = L \cdot \sin \beta, BM = R \cdot \sin \alpha \quad (6)$$

soit :

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{R}{L} \cdot \sin \alpha \\ \cos \beta &= \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - (R/L)^2 \cdot \sin^2 \alpha} \end{aligned} \quad (7)$$

Dans l'expression (7), on ne conserve que la racine positive ($\cos \beta > 0$), car β évolue dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$.

On a donc :

$$F_{tg} = -F_g \cdot \frac{R}{L} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - (R/L)^2 \cdot \sin^2 \alpha}} \quad (8)$$

et finalement, en utilisant la notation $\lambda = \frac{L}{R}$:

$$F_{tg} = -F_g \cdot \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \alpha}} \quad (9)$$

En adoptant les données numériques de notre moteur de référence, l'évolution de la force F_{tg} en fonction de l'angle vilebrequin est représentée sur la figure 6.

Cette force, de période 4π comme la force F_g , présente un maximum pour un angle de 382° (1 000 tr.min⁻¹) et de 387° (4 500 tr.min⁻¹), c'est-à-dire une quinzaine de degrés en retard par rapport à l'angle de pression maximum interne dans le cylindre (368°). Ce retard est dû au fait que cette force est liée à la poussée

Figure 6 – Effort de poussée piston-chemise dû aux gaz

des gaz et à la position angulaire de la bielle, comme l'indique la relation (9). Il se trouve que le terme F_g est maximum pour un angle vilebrequin de 368° environ, alors que le terme en α intervenant dans l'expression de F_{tg} est maximum pour une position vilebrequin égale à $382^\circ/388^\circ$ selon le régime. Le maximum de la force F_{tg} se trouve donc dans une position vilebrequin intermédiaire entre les deux valeurs précédentes.

2.1.2.3 Force bielle F_{bg}

La force appliquée à la bielle due à la poussée des gaz sur le piston est donnée par :

$$F_{bg} = \frac{F_g}{\cos \beta} = \frac{F_g}{\sqrt{1 - (R/L)^2 \cdot \sin^2 \alpha}} \quad (10)$$

d'où :

$$F_{bg} = \frac{\lambda \cdot F_g}{\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \alpha}} \quad (11)$$

Il est intéressant de représenter l'évolution de la force F_{bg} en fonction de l'angle vilebrequin, ce qui est fait figure 7.

En comparant les figures 4 et 6, on constate que les évolutions de F_g et F_{bg} sont très voisines, ce qui n'a rien d'étonnant puisque la quantité $(\lambda^2 - \sin^2 \alpha)$ est très proche de λ^2 .

Rappelons à ce stade que la majorité des moteurs d'automobiles actuelles possèdent des ratios λ très voisins de 3.

Ainsi, lorsqu'on effectue un développement limité en fonction de $\sin \alpha / \lambda$, les expressions (9) et (10) se simplifient :

$$F_{tg} \approx -F_g \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\lambda} + \frac{\sin^3 \alpha}{2\lambda^3} \right) = -F_g \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\lambda} + \frac{3\sin \alpha}{8\lambda^3} - \frac{\sin 3\alpha}{8\lambda^3} \right) \quad (12)$$

$$F_{bg} \approx F_g \cdot \left(1 + \frac{\sin^2 \alpha}{2\lambda^2} \right) = F_g \cdot \left(1 + \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{\cos 2\alpha}{4\lambda^2} \right) \quad (13)$$

Ces expressions sont celles qui sont utilisées lorsqu'on effectue une estimation au premier ordre de ces efforts.

Figure 7 – Effort appliqué à la bielle dû aux gaz

2.1.3 Couple des gaz appliqué au vilebrequin

Le couple C_{vg} appliqué au vilebrequin dû à la poussée des gaz sur la bielle est tel que :

$$C_{vg} = -d \cdot F_{bg} \quad (14)$$

avec d bras de levier.

Or :

$$-d \cdot F_{bg} = -OA \cdot \sin \beta \cdot F_{bg} = -OA \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot F_g \quad (15)$$

soit, avec les relations (7) :

$$C_{vg} = -F_g \cdot R \cdot \sin \alpha \cdot \left(1 + \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \alpha}} \right) \quad (16)$$

Il est parfois utile de disposer d'une relation plus aisée à manipuler. Ainsi, la relation (16) peut être approximée en faisant un développement limité en $\sin \alpha / \lambda$:

$$\begin{aligned} C_{vg} &= -F_g \cdot R \cdot \left\{ \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2\lambda} \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\lambda^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right\} \\ &\approx -F_g \cdot R \cdot \left\{ \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2\lambda} \cdot \left(1 + \frac{\sin^2 \alpha}{2\lambda^2} \right) \right\} \\ &\approx -F_g \cdot R \cdot \left\{ \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2\lambda} + \frac{\sin 2\alpha}{8\lambda^3} - \frac{\sin 4\alpha}{16\lambda^3} \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

L'évolution du couple C_{vg} en fonction de l'angle vilebrequin possède une forme caractéristique du type de celle donnée sur la figure 8. On peut y observer que la valeur moyenne du couple n'est pas nulle, ce qui prouve que la combustion est bien à l'origine d'un couple moteur.

Signalons au passage que la dernière relation (17), très pratique pour la majorité des analyses, est la plus souvent présentée dans les ouvrages traitant des excitations des moteurs alternatifs à pistons. Toutefois, dans certaines études poussées, il peut être utile de revenir à l'expression exacte (16), en particulier pour éviter

Figure 8 – Couple vilebrequin dû aux gaz

d'utiliser une expression qui n'est pas complète au niveau du contenu harmonique.

On verra dans un paragraphe comment ce couple vient se composer avec le couple dû aux effets inertiels. Mais, on entrevoit déjà pourquoi le couple moteur n'est pas régulier.

2.1.4 Moment des gaz appliqué au bloc moteur

Le moment de roulis par rapport à l'axe du vilebrequin M_g appliqué au bloc moteur est tel que :

$$M_g = -OA \cdot F_{tg} = OA \cdot \sin \beta \cdot F_{bg} = d \cdot F_{bg} \quad (18)$$

On constate donc que le moment de roulis appliqué au bloc moteur est égal en module au moment appliqué au vilebrequin par la poussée des gaz sur la bielle, mais de sens opposé, soit :

$$M_g = -C_{vg} \quad (19)$$

Le moment des gaz M_{gaz} tend à faire tourner le moteur autour de l'axe Ox. Pour l'anecdote, on peut rappeler qu'en aviation, il a existé au début du XX^e siècle des moteurs à refroidissement par air dont le vilebrequin était lié au fuselage, l'ensemble du bloc-cylindres tournant avec l'hélice [4]. La figure 9 en présente un exemple.

Dans les applications automobiles, le bloc-moteur est lié à la caisse, le plus souvent par l'intermédiaire de tampons élastiques, ayant notamment pour fonction de filtrer les irrégularités du moment des gaz. C'est donc le vilebrequin qui tourne autour de l'axe Ox.

2.1.5 Notion d'ordre moteur

Les paragraphes précédents ont montré que les forces et moments dus à la poussée des gaz ont une évolution de période angulaire égale à 4π , soit 2 tours de vilebrequin.

Figure 9 – Moteur rotatif Rhône avec collecteur d'admission, mono-allumage et bi-soupape (admission + échappement) [5]

On peut donc introduire la notion d'« ordre » moteur, sans cesse présente en matière d'acoustique automobile et d'analyse vibratoire en général, c'est-à-dire procéder à la décomposition spectrale de l'évolution angulaire des grandeurs liées à la combustion des gaz, par exemple du couple C_{vg} .

Comme application de cette notion d'ordre, traitons le cas de la pression P des gaz dans le cylindre, dont est fonction le couple C_{vg} . Cette fonction est périodique, continue et bornée, sa période T correspondant à 2 tours de vilebrequin, c'est-à-dire 4π . Du fait de cette périodicité et de la régularité de la fonction de pression P , on peut effectuer une décomposition en série de Fourier et écrire :

$$P(\alpha) = P_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(F_i \cdot \cos\left(i \frac{2\pi}{T} \alpha\right) + G_i \cdot \sin\left(i \frac{2\pi}{T} \alpha\right) \right) \quad (20)$$

En remplaçant T par sa valeur, et en effectuant le changement de variables $F_i = A_{i/2}$ et $G_i = B_{i/2}$, on obtient :

$$P(\alpha) = P_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(A_{i/2} \cdot \cos\left(i \frac{\alpha}{2}\right) + B_{i/2} \cdot \sin\left(i \frac{\alpha}{2}\right) \right) \quad (21)$$

avec :

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T P(\alpha) \cdot d\alpha = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^{4\pi} P(\alpha) \cdot d\alpha \\ A_{i/2} &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T P(\alpha) \cdot \cos\left(i \frac{\alpha}{2}\right) \cdot d\alpha = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{4\pi} P(\alpha) \cdot \cos\left(i \frac{\alpha}{2}\right) \cdot d\alpha \\ B_{i/2} &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T P(\alpha) \cdot \sin\left(i \frac{\alpha}{2}\right) \cdot d\alpha = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{4\pi} P(\alpha) \cdot \sin\left(i \frac{\alpha}{2}\right) \cdot d\alpha \end{aligned} \quad (22)$$

En explicitant l'expression précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= P_0 + A_{0,5} \cdot \cos(0,5\alpha) + B_{0,5} \cdot \sin(0,5\alpha) \\ &+ A_1 \cdot \cos(\alpha) + B_1 \cdot \sin(\alpha) \\ &+ A_{1,5} \cdot \cos(1,5\alpha) + B_{1,5} \cdot \sin(1,5\alpha) + \dots \end{aligned} \quad (23)$$

Dans cette expression, le terme P_0 n'est autre que la moyenne de la pression P sur 2 tours de vilebrequin.

Le terme fondamental est d'ordre 0,5, car il y a une combustion tous les 2 tours de vilebrequin (ou si l'on veut une « demi-combustion » par tour).

En désignant par la lettre H (comme « Harmonique ») la fréquence du tour de vilebrequin, on dira que l'harmonique fondamental de la pression est en $H0,5$.

Signalons que l'harmonique H , ou $H1$, est lié à la rotation du vilebrequin. On peut parler en « ordre » et prendre pour référence le tour-vilebrequin. Dans ce cas, parler d'une excitation en Hn signifie que cette excitation intervient n fois par tour de vilebrequin.

Cependant, nous pouvons aussi parler en fréquence. Dans ce cas, il s'agit d'un nombre d'événements par seconde, c'est-à-dire d'une fréquence exprimée en hertz (Hz). Une excitation qui interviendrait n fois par tour de vilebrequin pour un régime N donné aurait une fréquence égale à :

$$f_{Hn}^N = n \cdot \frac{N}{60} \text{ Hz} \quad (24)$$

avec N régime-moteur en $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

Par **exemple**, pour un régime moteur $N = 2400 \text{ tr/min}$, une excitation qui intervient 2 fois par tour de vilebrequin, soit $H2$, a une fréquence égale à :

$$f_{H2}^{2400} = 2 \cdot \frac{2400}{60} = 80 \text{ Hz} \quad (25)$$

Lorsqu'on analyse le couple des gaz appliqué au vilebrequin, on constate, à l'examen de la décomposition en série de Fourier de la pression, que le couple C_{vg} comprend tous les harmoniques multiples de 0,5, c'est-à-dire $H0,5, H1, H1,5, H2, H2,5$, etc.

Les termes $A_{i/2}$ et $B_{i/2}$ dépendent peu du régime moteur, mais principalement de la pression maximale observée au cours du cycle de combustion.

De façon générale, les coefficients de Fourier du couple gaz sont fonction de l'état de charge du moteur ; ils seront ainsi plus élevés à pleine charge qu'au ralenti. Ils dépendent aussi du type de moteur ; ils seront plus élevés en moteur Diesel qu'en essence, et plus élevés en version turbo qu'en version atmosphérique.

En pratique, on observe que l'intensité des harmoniques décroît de façon hyperbolique à partir de l'ordre 0,5.

2.2 Forces et moments d'inertie

Après la description des sollicitations générées par la compression et la détente des gaz, il convient de s'intéresser aux sollicitations d'inertie qui agissent sur l'attelage mobile. Les pièces mobiles telles que piston, bielle, vilebrequin, n'ont pas un mouvement à vitesse uniforme selon une direction ou un sens unique. Elles sont accélérées ou décélérées selon l'instant du cycle de combustion. En vertu du principe fondamental de la dynamique, ces non-uniformités de mouvements créent des forces et des moments. Ces forces et moments d'« inertie », appliqués au bloc moteur et au vilebrequin, sont donc proportionnels à la masse ou à l'inertie des pièces en mouvement, ainsi qu'à leur accélération.

2.2.1 Bielle en mouvement

Le mouvement de la bielle est complexe et ne permet pas un calcul simple des efforts d'inertie. Pour simplifier l'étude de celle-ci, on assimile donc souvent la bielle à 2 masses indépendantes concentrées aux extrémités (en A : au centre du pied de bielle et en M : au centre de la tête de bielle) qui, elles, sont animées de mouvements simples. Il s'agit d'un mouvement de translation de la partie A et d'un mouvement de rotation de la partie M. Les 2 masses prennent alors respectivement l'appellation de masse alternative de la bielle m_{alt} et masse rotative de la bielle m_{rot} . Cette **modélisation simplifiée de la bielle** s'effectue notamment sous les conditions suivantes :

- la somme des masses aux extrémités doit être égale à la masse totale de la bielle ;
- le barycentre des masses aux extrémités doit être situé au centre de gravité de la bielle réelle.

Il est à noter que les 2 variables que constituent les 2 masses ne permettent pas de respecter la condition d'égalité du moment d'inertie de la bielle réelle avec le moment d'inertie du modèle simplifié à 2 masses. Une modélisation simplifiée exacte est proposée en partie documentation de cet article consacré à l'acyclisme des moteurs à 3 et 4 cylindres.

Sans entrer dans les détails, il faut savoir que, le plus souvent, l'habitude prise par les motoristes est de décomposer la bielle de la façon suivante, lorsque l'on ne connaît que la masse totale m_b de la bielle :

- en A (pied de bielle), un tiers de la masse totale de la bielle, soit $m_b/3$;
- en M (tête de bielle), deux tiers de la masse totale de la bielle, soit $2m_b/3$.

Ainsi, si l'on appelle m_p la masse du piston, m_m la masse du maneton, M_{alt} la masse alternative du moteur complet et M_{rot} la masse rotative du moteur complet, on obtient :

$$\begin{aligned} M_{alt} &= m_p + m_{alt} \approx m_p + \frac{m_b}{3} \\ M_{rot} &= m_m + m_{rot} \approx m_m + \frac{2m_b}{3} \end{aligned} \quad (26)$$

Nota : lorsque, par mesure ou par CAO, on peut disposer de la position exacte du centre de gravité, on utilise les ratios exacts en lieu et place des ratios 1/3 et 2/3.

2.2.2 Forces d'inertie appliquées au bloc moteur

Le déplacement de la masse alternative m_{alt} induit une **force d'inertie alternative verticale** $F_{i/alt}$ appliquée en A.

Cette force se décompose en 2 forces au niveau de l'axe du piston ; une force F_{bi} dans l'axe de la bielle et une force F_{ti} transversale au piston qui crée une poussée latérale sur la chemise, ainsi qu'un moment de roulis qui sera détaillé ultérieurement.

La force F_{bi} se retrouve intégralement au niveau du maneton, et également en O associée à un couple C_{vj} appliqué au vilebrequin, qui vient se composer avec le couple C_{vg} .

Au niveau du palier de vilebrequin est donc appliquée non seulement la force $F_{i/alt}$ (projection de F_{bi} sur Oz), mais aussi la force F_{ti} (projection de F_{bi} sur Oy), comme on peut le voir sur la figure 10.

Le déplacement en rotation de la masse m_{rot} concentrée au point M produit une force d'inertie rotative $F_{i/rot}$.

Finalement, la somme des efforts d'inertie $F_i = F_{i/alt} + F_{i/rot}$ s'appliquant au bloc moteur n'est pas nulle, contrairement aux efforts de combustion :

$$F_{i/alt} + F_{i/rot} \neq 0 \quad (27)$$

Figure 10 – Bilan des forces d'inertie

La composante verticale de la force F_i fait vibrer verticalement le moteur selon un mouvement qualifié de pilon du fait de la similitude avec ce dispositif.

2.2.2.1 Force verticale $F_{i/alt}$

La force verticale $F_{i/alt}$ peut être obtenue simplement en utilisant la définition d'une force d'inertie :

$$F_{i/alt} = -m_{alt} \cdot \ddot{OA} = -m_{alt} \cdot \frac{d^2 OA}{dt^2} \quad (28)$$

avec :

$$OA = R \cdot \cos \alpha + L \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\lambda^2}} \quad (29)$$

En considérant que $d\alpha/dt = \omega$, avec ω vitesse angulaire considérée comme constante, on obtient, tous calculs faits :

$$F_{i/alt} = m_{alt} \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \left\{ \cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\lambda^3 \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\lambda^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\lambda \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\lambda^2}}} \right\} \quad (30)$$

Pour plus de commodités, on a souvent recours à l'expression approchée qui donne, après développements, et en se limitant finalement aux termes en λ^{-3} :

$$F_{i/alt} \approx m_{alt} \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \left[\cos \alpha + \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{4\lambda^3} + \frac{15}{128\lambda^5} + \frac{35}{512\lambda^7} + \dots \right) \cos 2\alpha - \left(\frac{1}{4\lambda^3} + \frac{3}{16\lambda^5} + \frac{35}{512\lambda^7} + \dots \right) \cos 4\alpha + \left(\frac{9}{128\lambda^5} + \frac{45}{512\lambda^7} + \dots \right) \cos 6\alpha - \left(\frac{5}{256\lambda^7} + \dots \right) \cos 8\alpha + \dots \right] \quad (31)$$

$$\approx m_{alt} \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \left[\cos \alpha + \frac{\cos 2\alpha}{\lambda} + \frac{\cos 2\alpha}{4\lambda^3} - \frac{\cos 4\alpha}{4\lambda^3} + \dots \right] \quad (31)$$

toujours avec $\alpha = \omega \cdot t = (2\pi \cdot N/60) \cdot t$ soit $\omega = 2\pi \cdot N/60$, N étant le régime en tr.min^{-1} .

En pratique, on va même plus loin en considérant le plus souvent comme négligeables les termes en λ^{-3} . En effet, pour les bielles standards, λ est voisin de 3, soit $\lambda^{-3} = 1/27$. Ainsi, avec cette approximation, l'expression de l'effort d'inertie vertical se réduit à :

$$F_{i/alt} \approx m_{alt} \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \left[\cos \alpha + \frac{\cos 2\alpha}{\lambda} \right] \quad (32)$$

Afin de donner des ordres de grandeur pour l'effort $F_{i/alt}$, nous avons représenté sur la figure 11 l'évolution de cet effort en fonction de l'angle vilebrequin, ceci avec $m_{alt} = 0,8 \text{ kg}$ et $\lambda = 3,35$. On peut constater qu'à haut régime, l'intensité de cette sollicitation peut être très importante. Il convient aussi de signaler que l'erreur entre la formulation exacte (30) et la formulation approchée (32) est très faible, en moyenne moins de 0,1 % d'écart relatif.

Comme son expression littérale le montre, la force d'inertie alternative appliquée au bloc moteur est périodique, de période 2π , ce que l'on conçoit bien physiquement. Son module est maximum au Point Mort Haut (PMH) et nul quand bielle et manivelle forment approximativement un angle droit. Cette situation angulaire correspond au cas où la vitesse est maximale, donc où l'accélération est nulle. Au Point Mort Bas (PMB), le module de $F_{i/alt}$ est inférieur à la valeur atteinte au PMH.

Si l'on considère la force $F_{i/alt}$ sous sa forme harmonique, telle qu'elle est écrite dans la relation (31), on voit que le terme fondamental est en $H1$, les harmoniques suivants étant tous

Figure 11 – Force d'inertie alternative verticale

d'ordre pair (2, 4, 6...). Les harmoniques d'ordre $2n$ supérieur à 2 décroissent très vite en amplitude selon une loi en λ^{1-2n} . Il est à noter que si la bielle était infiniment longue, seul le terme d'ordre 1 subsisterait et $F_{i/alt}$ serait sinusoïdal et égal à $m_{alt} \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha$.

On constate aussi que $F_{i/alt}$ varie en ω^2 . La force alternative d'inertie appliquée au bloc moteur est donc d'autant plus importante que le régime est élevé.

Si l'on reprend la relation (32) donnant $F_{i/alt}$ en fonction de α , on voit qu'au PMH, $F_{i/alt}$ vaut :

$$m_{alt} \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{\lambda} \right\} \quad (33)$$

alors qu'au PMB, on obtient :

$$- m_{alt} \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{\lambda} \right\} \quad (34)$$

Cette différence traduit physiquement que le centre de gravité de l'ensemble piston-bielle est plus proche du centre de rotation du vilebrequin au PMB qu'au PMH.

2.2.2.2 Force transversale piston F_{ti}

La force d'inertie F_{ti} appliquée par la masse alternative sur la chemise, est facile à exprimer. Il suffit de reprendre le calcul de la force transversale appliquée par le piston sur la chemise due aux gaz. On a ainsi :

$$F_{ti} = -F_{i/alt} \cdot \tan \beta = -F_{i/alt} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \alpha}} \quad (35)$$

On a souvent recours à l'expression approchée :

$$F_{ti} \approx -m_{alt} \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \left[-\frac{\sin \alpha}{2\lambda^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2\lambda} + \frac{\sin 3\alpha}{2\lambda^2} - \frac{\sin 2\alpha}{8\lambda^3} + \frac{\sin 4\alpha}{16\lambda^3} + \dots \right] \quad (36)$$

qui met en évidence le contenu spectral de F_{ti} .

En utilisant notre application numérique, l'évolution de la force F_{ti} avec l'angle vilebrequin est représentée figure 12, toujours avec $m_{alt} = 0,8 \text{ kg}$ et $\lambda = 3,35$. Pour le régime de $4 500 \text{ tr.min}^{-1}$, on a superposé l'évolution de F_{ti} obtenue par la valeur exacte (35) et par la valeur approchée (36). On constate que l'erreur est très faible et donc que l'utilisation de la valeur approchée est légitime.

Figure 12 – Effort d'inertie de la masse alternative sur la chemise

Mais l'erreur est toutefois plus importante si l'on néglige les harmoniques d'ordres supérieurs à 2.

Comme la force $F_{i/alt}$, la force F_{ij} est périodique, de période 2π . Sa valeur moyenne est égale à 0, ceci quel que soit le régime considéré. Comme on pouvait le supposer, la force transversale exercée par la masse alternative sur la chemise est nulle, dès l'instant où le piston atteint le PMH ou le PMB, puisque la bielle est verticale.

Nota : cette remarque n'est pas exacte lorsqu'il s'agit d'un moteur possédant un vilebrequin désaxé latéralement.

2.2.2.3 Force bielle F_{bi}

La force appliquée à la bielle (jonction des masses ponctuelles alternative et rotative) due à l'inertie se calcule de la même façon que la force appliquée à la bielle due aux gaz. On a ainsi :

$$F_{bi} = \frac{F_{i/alt}}{\cos \beta} = \frac{\lambda \cdot F_{i/alt}}{\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \alpha}} \quad (37)$$

soit encore, en effectuant un développement limité selon $\frac{\sin^2 \alpha}{\lambda^2}$:

$$F_{bi} \approx F_{i/alt} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \alpha}{\lambda^2} \right) \quad (38)$$

La relation précédente peut se mettre sous la forme approchée suivante, en ayant recours à la relation (31) :

$$F_{bi} \approx m_{alt} \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \left[\frac{\cos \alpha + \frac{\cos \alpha}{8\lambda^2} + \frac{\cos 2\alpha}{\lambda} + \frac{\cos 2\alpha}{4\lambda^2} + \frac{\cos 2\alpha}{4\lambda^3} - \frac{\cos 3\alpha}{8\lambda^2} - \frac{1}{8\lambda^3} + \dots \right] \quad (39)$$

L'évolution de la force F_{bi} avec l'angle vilebrequin est représentée sur la figure 13 ($m_{alt} = 0,8$ kg et $\lambda = 3,35$).

La force bielle F_{bi} est très proche de la force verticale $F_{i/alt}$. Ceci est d'autant plus vrai que la valeur de λ est grande, ainsi que le montre l'expression (37).

2.2.3 Couple d'inertie appliqué au vilebrequin

Le couple d'inertie appliqué au vilebrequin C_{vi} est donné par :

$$C_{vi} = -d \cdot F_{bi} = -OA \cdot F_{i/alt} \cdot \tan \beta \quad (40)$$

Figure 13 – Effort appliqué à la bielle dû aux inerties

ou encore :

$$\begin{aligned} C_{vi} &= -OA \cdot F_{i/alt} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \alpha}} \\ &= OA \cdot m_{alt} \cdot \omega^2 \cdot \frac{d^2 OA}{d\alpha^2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \alpha}} \end{aligned} \quad (41)$$

Compte-tenu de l'expression :

$$OA = R \cdot \cos \alpha + L \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\lambda^2}} \quad (42)$$

et de sa dérivée seconde temporelle :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 OA}{d\alpha^2} &= -R \cdot \cos \alpha - \frac{L \cdot \cos 2\alpha}{\lambda^2} \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\lambda^2} \right)^{-1/2} \\ &\quad - \frac{L \cdot \sin^2 2\alpha}{4\lambda^4} \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\lambda^2} \right)^{-3/2} \end{aligned} \quad (43)$$

on obtient :

$$OA \cdot \frac{d^2 OA}{d\alpha^2} = -R^2 \cdot \left(\cos^2 \alpha + \frac{\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha}{\lambda} \cdot (a)^{-1/2} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin^2 2\alpha}{4\lambda^3} \cdot (a)^{-3/2} + \lambda \cdot \cos \alpha \cdot (a)^{-1/2} + \cos 2\alpha + \frac{1}{a} \cdot \frac{\sin^2 2\alpha}{4\lambda^2} \right) \quad (44)$$

avec $a = 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\lambda^2}$.

Finalement :

$$C_{vi} = m_{alt} \cdot R^2 \cdot \omega^2 \cdot \left(-\frac{\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\lambda \cdot \sqrt{a}} - \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha}{\lambda^2 \cdot a} - \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin^2 2\alpha}{4\lambda^4 \cdot a^2} - \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \frac{\sin \alpha \cdot \cos 2\alpha}{\lambda \cdot \sqrt{a}} - \frac{\sin \alpha \cdot \sin^2 2\alpha}{4\lambda^3 \cdot a \cdot \sqrt{a}} \right) \quad (45)$$

ou encore, après développements trigonométriques, l'expression exacte du couple d'inertie est :

$$C_{vi} = -m_{alt} \cdot R^2 \cdot \omega^2 \cdot \left(-\frac{\sin \alpha}{4\lambda \cdot \sqrt{a}} + \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{3\sin 3\alpha}{4\lambda \cdot \sqrt{a}} + \frac{\sin 4\alpha}{4\lambda^2 \cdot a} + \frac{\sin \alpha \cdot \sin^2 2\alpha}{4\lambda^3 \cdot a \cdot \sqrt{a}} + \frac{\sin^3 2\alpha}{8\lambda^4 \cdot a^2} \right) \quad (46)$$

Tous calculs faits, l'expression approchée du couple d'inertie est :

$$C_{vi} \approx -m_{alt} \cdot R^2 \cdot \omega^2 \cdot \left(-\frac{\sin \alpha}{4\lambda} + \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{3\sin 3\alpha}{4\lambda} + \frac{\sin 4\alpha}{4\lambda^2} - \frac{\sin \alpha}{16\lambda^3} + \frac{9\sin 3\alpha}{32\lambda^3} - \frac{5\sin 5\alpha}{32\lambda^3} + \dots \right) \quad (47)$$

Sur la figure 14, on présente l'évolution du couple C_{vi} appliqué au vilebrequin en fonction de l'angle vilebrequin avec $m_{alt} = 0,8 \text{ kg}$ et $\lambda = 3,35$. Le couple C_{vi} est périodique, de période 2π . Sa valeur moyenne est égale à 0, ceci quel que soit le régime considéré.

Dans la décomposition harmonique (47), on constate que tous les termes existent, pairs et impairs. Le couple d'inertie C_{vi} est donc riche en harmoniques. Toutefois, le terme le plus marqué est le terme en $H2$. À noter que, comme la force alternative d'inertie, le couple d'inertie alternatif varie en ω^2 et est donc d'autant plus important que le régime est élevé.

2.2.4 Moment d'inertie appliqué au bloc moteur

Le moment d'inertie appliqué au bloc moteur est donné par :

$$\begin{aligned} M_{i/alt} &= -OA \cdot F_{ti} = OA \cdot F_{i/alt} \cdot \tan \beta \\ &= d \cdot \frac{F_{i/alt}}{\cos \beta} = d \cdot F_{bi} \end{aligned} \quad (48)$$

En se reportant à l'expression (40), on constate que :

$$M_{i/alt} = -C_{vi} \quad (49)$$

Les remarques faites à propos de C_{vi} sont donc applicables à $M_{i/alt}$.

Figure 14 – Couple vilebrequin dû à l'inertie

Figure 15 – Force d'inertie rotative

2.2.5 Force d'inertie rotative

Due aux masses m_{rot} en rotation, la force d'inertie rotative est donnée par :

$$F_{i/rot} = m_{rot} \cdot R \cdot \omega^2 \quad (50)$$

Sur la figure 15, on a tracé l'évolution de la force $F_{i/rot}$ avec le régime moteur pour une masse rotative de 1,3 kg.

La force $F_{i/rot}$ s'applique sur le vilebrequin, mais aussi sur le bâti moteur par l'intermédiaire des paliers de vilebrequin. Elle peut se décomposer en :

$$\begin{aligned} m_{rot} \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha & \quad \text{selon Oz} \\ -m_{rot} \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \sin \alpha & \quad \text{selon Oy.} \end{aligned}$$

Cette décomposition met en évidence que dans le cas d'un moteur monocylindre, la force d'inertie rotative engendre uniquement un effort de tamis d'ordre 1 (selon l'axe Oy) et un effort de pilon d'ordre 1. Sur la figure 16, on a tracé les évolutions des forces d'inertie rotatives selon Oy et Oz.

L'expression de $F_{i/rot}$ suppose que le mouvement de rotation du vilebrequin est uniforme, ce qui n'est pas rigoureusement vrai. Cette simplification équivaut à négliger $d\omega/dt$ devant ω^2 .

2.3 Effets combinés des forces, des couples et des moments des gaz et d'inertie

Dans les paragraphes précédents, nous avons vu que le bloc moteur et le vilebrequin sont soumis aux forces, couples et moments suivants :

– **bloc moteur** :

- $F_{i/alt}$, force d'inertie alternative verticale,
- $F_{i/rot}$, force d'inertie rotative,
- $M_{i/alt}$, moment d'inertie alternatif,
- M_g , moment des gaz,

(ainsi que F_g , qui ne se retrouve pas en tant que force extérieure, mais qui est déterminante dans le dimensionnement du bloc moteur) ;

Figure 16 – Efforts d'inertie sur les paliers

– vilebrequin :

- C_{vi} , couple d'inertie,
- C_{vg} , couple des gaz,

(ainsi que les forces F_{bg} , F_{bi} , $F_{i/rot}$ reprises par le vilebrequin et déterminantes dans le dimensionnement de celui-ci).

À l'aide de la description de l'ensemble des sollicitations élémentaires agissant sur l'attelage mobile, nous pouvons étudier l'équilibre de ce système. En particulier, nous pouvons détailler comment se composent les forces et les moments d'inertie et de combustion, à la fois sur le bloc moteur et sur le vilebrequin.

2.3.1 Effets des forces sur le bloc moteur

La résultante extérieure des forces des gaz étant nulle (F_g sur la culasse et sur les paliers se compensent, F_{tg} sur la chemise et sur les paliers se compensent aussi), le bloc-moteur n'est donc soumis en termes de forces extérieures qu'à la force d'inertie verticale $F_{i/alt}$ et à la force rotative $F_{i/rot}$.

2.3.1.1 Force verticale $F_{i/v}$

La composante verticale de la force F_i (composition de $F_{i/alt}$ et $F_{i/rot}$) est $F_{i/v}$. Elle peut se représenter sous la forme d'un sonagramme, c'est-à-dire sous la forme de spectres évolutifs avec les régimes (figure 17). On peut constater que pour un moteur monocylindre, l'harmonique de la force alternative d'inertie le plus marqué est H1 (les harmoniques d'ordres 6, 8, 10... sont quasiment imperceptibles). Pour compléter ce tracé, nous avons porté l'amplitude des ordres exprimés en décibels en fonction de la fréquence.

On peut appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'ensemble du moteur pour trouver les mouvements de ce dernier selon l'axe vertical. Si l'on suppose que le GMP est lié au châssis par des liaisons sans raideur ni amortissement, et que l'effort d'inertie vertical s'exerce au centre de gravité du moteur (hypothèse relativement réaliste qui permet de bien caractériser le comportement vertical du moteur), la mise en équation se réduit à :

$$F_{i/v} = M \cdot \gamma_v \quad (51)$$

avec M : masse du GMP,
 γ_v : son accélération verticale.

(a) sonagramme de la force verticale appliquée au bloc moteur

(b) suivi de l'amplitude des ordres en fonction de la fréquence

Figure 17 – Représentation fréquentielle de la force verticale appliquée au bloc moteur

Compte tenu de l'expression de $F_{i/alt}$ et $F_{i/rot}$, on obtient :

$$\gamma_v \approx \frac{m_{alt}}{M} \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \left\{ \cos \alpha \cdot \left(1 + \frac{m_{rot}}{m_{alt}} \right) + \frac{\cos 2\alpha}{\lambda} + \frac{\cos 2\alpha}{4\lambda^3} - \frac{\cos 4\alpha}{4\lambda^3} + \dots \right\} \quad (52)$$

Si on appelle z le déplacement vertical du centre de gravité du moteur et si celui-ci s'effectue en régime harmonique, on a :

$$\gamma_v = \omega^2 \cdot \frac{d^2 z}{d\alpha^2} \quad (53)$$

soit :

$$z \approx \frac{m_{alt}}{M} \cdot R \cdot \left\{ -\cos \alpha \cdot \left(1 + \frac{m_{rot}}{m_{alt}} \right) - \frac{\cos 2\alpha}{4\lambda} - \frac{\cos 2\alpha}{16\lambda^3} + \frac{\cos 4\alpha}{16\lambda^3} + \dots \right\} \quad (54)$$

L'expression du déplacement z met en évidence que celui-ci ne dépend plus de la fréquence. On qualifie z d'« invariant » de déplacement du moteur.

Les vibrations, et plus précisément les accélérations, sont souvent exprimées en dB pour faciliter la corrélation avec les mesures de bruit.

Pour effectuer cette conversion, on utilise la règle suivante :

$$\gamma_{v(dB)} = 20 \cdot \log \frac{\gamma_v}{\gamma_r} \quad \text{avec} \quad \gamma_r = 1 \text{ m.s}^{-2} \quad (55)$$

Ainsi, lorsque le régime moteur (donc ω) double, l'accélération verticale augmente de 12 dB ($20 \cdot \log(4\omega^2) - 20 \cdot \log(\omega^2) = 20 \cdot \log 4 = 12$). En pratique, la pente réelle peut être différente de 12 dB/octave (une octave correspondant à un doublement de ω), car le moteur peut se déformer sous l'effet de l'excitation.

Le passage à l'application numérique permet d'appréhender l'importance des sollicitations inertielles auxquelles est soumis un moteur.

Reprenons les **valeurs numériques** utilisées jusqu'à présent, soit $m_{alt} = 0,8$ kg, $m_{rot} = 1,3$ kg $R = 40$ mm, la masse du moteur monocylindre étant par exemple de $M = 40$ kg.

La force alternative verticale d'ordre 1 est donnée par :

$$F_{i/v} = (m_{alt} + m_{rot}) \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t),$$

ce qui, pour un régime de 4 500 tr.min⁻¹, donne :

$$F_{i/v} = 18\,654 \cdot \cos(471t) \text{ (en N)}.$$

Dans ce cas, le bloc moteur est donc soumis à une force d'environ 2 t, ceci 75 fois par seconde. Il importe donc de limiter l'influence de cette force, d'une part parce qu'elle peut être endommageante, voire destructrice, pour le moteur, d'autre part parce qu'elle se traduit dans le véhicule par un bruit insupportable.

Les accélérations et mouvements verticaux du moteur valent respectivement :

$$\gamma_v = 466 \cdot \cos(471t) \text{ (en m.s}^{-2}\text{)}$$

$$z = 2,1 \cdot \cos(471t) \text{ (en mm)}$$

Remarques :

- l'ordre de grandeur du mouvement vertical d'un monocylindre est beaucoup plus important que celui d'un 4 cylindres (formé par les mêmes monocylindres déphasés), qui typiquement est de l'ordre de 50 à 100 μ m suivant le type de moteur. L'invariance du déplacement est un résultat important qui est parfois mal connu des « non-motoristes ». Ainsi, il est important de connaître cette caractéristique pour définir de façon physique des essais vibratoires. Cette règle doit faire partie du cahier des charges des excitations sur pot vibrant, lorsque l'on teste des éléments du moteur soumis à ses accélérations verticales ;

- la valeur indiquée ci-dessus (2,1 mm) est une valeur obtenue avant équilibrage des masses rotatives. Après équilibrage des masses rotatives (sans équilibrage des masses alternatives), cette valeur est beaucoup plus faible, typiquement de l'ordre de 0,8 mm.

2.3.1.2 Force transversale F_t

La force transversale F_t exercée par le piston en fonction de l'angle vilebrequin est donnée par la composition des équations (9) et (35), soit :

$$F_t = -(F_{i/alt} + F_g) \cdot \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \alpha}} \quad (56)$$

Sur la figure 18, est présentée l'évolution de la force transversale exercée par le piston en fonction de l'angle vilebrequin.

Ces courbes sont tracées pour des conditions de pleine charge, sachant que pour de faibles charges, on considère que les efforts sont uniquement dus aux inerties.

Dans ce cas, la force F_t est périodique, de période 4π . Elle est composée de la force F_{tg} due aux gaz et de la force F_{ti} due aux inerties. Au moment de la combustion, ces deux forces se compensent, ce qui limite l'amplitude maximale de la force F_t . On notera d'ailleurs qu'à 20°, l'effort est de signe opposé à celui obtenu à 380°. En effet, à 20°, il s'agit d'un effort d'inertie, alors qu'à 380°, il s'agit essentiellement d'un effort dû aux gaz.

Figure 18 – Force transversale sur le piston

Sur la figure 19, on présente deux décompositions spectrales de la force F_t , respectivement pour des régimes de 1 000 tr.min⁻¹ et 4 500 tr.min⁻¹.

À travers ces deux spectres donnés sur l'exemple de référence, on notera la richesse harmonique du monocylindre. Entre les deux régimes, on illustre particulièrement bien la différence entre les effets de charge et les effets d'inertie au travers de l'amplitude de l'ordre 2.

2.3.1.3 Force bielle F_b

En reprenant les équations (11) et (37), la force F_b est donnée par :

$$F_b = (F_{i/alt} + F_g) \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 \alpha}} \quad (57)$$

L'évolution de la force supportée par la bielle en fonction de l'angle vilebrequin est présentée sur la figure 20, pour des conditions de pleine charge à deux régimes différents.

La force F_b est périodique de période 4π . Elle est composée de la force F_{bg} due aux gaz et de la force F_{bi} due aux inerties. Comme pour la force F_t , les effets inertiels s'opposent à la poussées des gaz au moment de la combustion, ce qui a pour effet de limiter l'intensité de la force F_b appliquée à la bielle.

2.3.2 Effets des couples sur le vilebrequin : couple moteur et acyclisme moteur

Le couple moteur C_m appliqué au vilebrequin résulte de la superposition du couple dû aux gaz C_{vg} et du moment dû à l'inertie C_{vi} :

$$C_m \approx -F_g \cdot R \cdot \left\{ \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2\lambda} + \frac{\sin 2\alpha}{8\lambda^3} \right\} - m_{alt} \cdot R^2 \cdot \omega^2 \cdot \left\{ -\frac{\sin \alpha}{4\lambda} + \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{3 \sin 3\alpha}{4\lambda} + \frac{\sin 4\alpha}{4\lambda^2} \right\} \quad (58)$$

Les tracés de la figure 21 illustrent l'évolution de C_m avec l'angle vilebrequin, pour les deux régimes de référence (en condition de pleine charge).

Figure 19 – Décomposition spectrale de la force transversale sur le piston

La première remarque est que sur les 720° de rotation du vilebrequin, le moteur produit du couple pendant moins d'un tiers du cycle (au mieux) et qu'il absorbe du couple le reste du temps. Le couple instantané maximal de ce monocylindre est environ 15 fois le couple moyen (ici 46 Nm pour 4 500 tr.min⁻¹ et 26 Nm pour 1 000 tr.min⁻¹), alors que l'intensité maximale instantanée du couple négatif (résistant) atteint près de 5 à 6 fois le couple moyen. Un moteur monocylindre nécessite donc un volant d'inertie dimensionné pour atténuer l'effet des variations instantanées de couple.

Si on appelle I_v le moment d'inertie (supposé constant) de l'ensemble des masses rotatives (principalement vilebrequin + volant d'inertie + système d'embrayage) et α le mouvement angulaire de ces masses, on peut écrire, en supposant que l'embrayage assure un découplage parfait :

$$C_m = I_v \cdot \ddot{\alpha} \quad (59)$$

Le moment I_v n'est pas infini, et C_m est borné, ce qui fait que l'accélération angulaire du vilebrequin et des masses qui lui sont attachées n'est pas nulle. Celles-ci ne tournent donc pas à vitesse

Figure 20 – Effort dans la bielle

Figure 21 – Couple moteur

constante, mais oscillent autour d'une vitesse moyenne selon les décompositions harmoniques établies précédemment pour l'expression du couple moteur.

Cette irrégularité de rotation des parties tournantes est appelée « **acyclisme moteur** », phénomène parasite qui ne participe pas à la motricité du véhicule et qui doit être limité, car il peut être la source de perturbations acoustiques, vibratoires, voire mécaniques.

Afin d'appréhender plus complètement les facteurs qui affectent l'acyclisme d'un monocylindre, il est intéressant d'introduire l'expression du couple moteur. Ainsi, l'équation (59) devient, en reportant l'expression du couple (58) :

$$I_v \cdot \ddot{\alpha} \approx -F_g \cdot R \cdot \left\{ \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2\lambda} \right\} - m_{alt} \cdot R^2 \cdot \omega^2 \cdot \left\{ -\frac{\sin \alpha}{4\lambda} + \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{3\sin 3\alpha}{4\lambda} + \frac{\sin 4\alpha}{4\lambda^2} \right\} \quad (60)$$

 Figure 22 – Spectre harmonique du couple moteur à 4 500 tr.min⁻¹

Les valeurs $\dot{\alpha}$ et α s'obtiendront par intégration de l'équation (60) simplifiée au préalable en posant $\alpha = \omega \cdot t$. Cette équation permet d'énoncer quelques conséquences évidentes :

- l'inertie influe directement sur l'acyclisme en accélération, vitesse ou déplacement angulaire ;
- les harmoniques d'inertie et de gaz ne s'opposent pas systématiquement. Dans ce cas, l'effet des gaz sera prépondérant à bas régime, tandis que l'effet des inerties le sera à haut régime.

Sur la figure 22, nous donnons un exemple de spectre du couple moteur pour le régime de 4 500 tr.min⁻¹. Nous adoptons cette fois-ci une échelle d'amplitude logarithmique pour souligner la richesse du spectre du moteur monocylindre. Remarquons par exemple que dans l'exemple choisi, il faut aller jusqu'à l'harmonique 15 pour avoir une amplitude inférieure à 1 N.m, alors que l'harmonique le plus intense H1 possède une amplitude de l'ordre de 22 N.m

2.3.3 Effets des moments sur le bloc moteur : moment de roulis

Le moment de roulis global M (figure 2) imposé au bloc moteur résulte de la superposition du moment dû aux gaz M_g et du moment d'inertie $M_{i/alt}$. Compte-tenu des expressions (19) et (49), le couple moteur a pour expression approchée, à l'ordre λ^{-2} :

$$M_r \approx F_g \cdot R \cdot \left\{ \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2\lambda} \right\} + m_{alt} \cdot R^2 \cdot \omega^2 \cdot \left\{ -\frac{\sin \alpha}{4\lambda} + \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{3\sin 3\alpha}{4\lambda} + \frac{\sin 4\alpha}{4\lambda^2} \right\} \quad (61)$$

Il faut retenir que le moment M_r est égal en module et opposé en signe au couple C_m ; son spectre est donc le même.

Sur les figures 23 et 24, on présente les sonagrammes de M_r dans le cas d'une accélération lente du régime moteur correspondant à un posé de pied « léger » (faible charge partielle), puis d'une forte accélération due à un posé de pied « pleine charge ».

La différence entre un fonctionnement à faible charge partielle et un fonctionnement à pleine charge est nette. Dans le cas de l'accélération lente, la contribution des forces de combustion sur le roulis est faible. Elle devient prépondérante dans le cas de la pleine charge. Le sonagramme devient alors beaucoup plus riche,

Figure 23 – Représentation fréquentielle du moment du roulis appliqué au bloc moteur – Faible charge

avec notamment l'apparition d'harmoniques multiples de 0,5 de niveaux élevés directement liés aux forces de combustion.

Si l'on appelle I_r le moment d'inertie en roulis du moteur, k la raideur en torsion du GMP sur ses tampons élastiques, et ϕ le mouvement angulaire du moteur autour de son axe d'inertie, on peut écrire pour l'équilibre dynamique du GMP :

$$\overline{M_r} + (M_r(\omega t) - \overline{M_r}) = I_r \cdot \ddot{\phi} + k \cdot \phi \quad (62)$$

La décomposition du moment de roulis en sa composante constante $\overline{M_r}$ et sa composante harmonique à moyenne nulle permet de clairement différencier les termes de la solution. Cette solution devient $\alpha_v + \bar{\alpha}$ avec $\bar{\alpha} = \overline{M_r}/k$ et α_v , solution de $M_r(\alpha) - \overline{M_r} = I_r \cdot \ddot{\alpha} + k \cdot \alpha$.

Ainsi, le GMP prend une position d'équilibre moyenne (qui dépend notamment de la charge et de la raideur des suspensions moteur) autour de laquelle il oscille. Les points du moteur éloignés de l'axe de roulis du GMP (en général assez proche de l'axe de rotation du vilebrequin) sont soumis à des accélérations transversales importantes, évidemment en opposition de phase entre le haut et le bas du moteur.

Figure 24 - Représentation fréquentielle du moment de roulis appliqué au bloc moteur - Pleine charge

Sous les effets conjugués de $F_{i/alt}$ et de M_r , le GMP vibre suivant un mouvement complexe qu'il est important de définir, tout au moins pour les harmoniques les plus marqués. Les points du moteur les plus stables seront les plus appropriés pour la mise en place des supports-moteur.

2.4 Bilan des excitations du moteur monocylindre

Finalement, le bloc-moteur monocylindre et le vilebrequin sont soumis aux forces, couple et moments suivants :

– **bloc moteur :**

- $F_{i/h}$: force d'inertie alternative horizontale due à la composante horizontale de $F_{i/rot}$;
- $F_{i/v}$: force d'inertie alternative verticale due à la composante verticale de $F_{i/rot}$ et à la force d'inertie alternative verticale $F_{i/alt}$;
- M_r : moment de roulis dû au moment des gaz M_g , et au moment d'inertie $M_{i/alt}$;

– **vilebrequin :**

- C_m : couple moteur ($= -M_r$) dû au couple des gaz C_{vg} ($= -M_g$) et au couple d'inertie C_{vi} ($= -M_{i/alt}$).

Le tableau 1 résume les propriétés principales des forces et moments appliqués au bloc-moteur ; leur axe d'action, leur sensibilité à la vitesse ou à la charge, leur contenu spectral et leur capacité à être équilibrables. Le tableau 2 rappelle les amplitudes de ces forces et moments.

2.5 Commentaires

Le spectre des excitations d'un moteur monocylindre en fonctionnement est riche. Pour diminuer l'amplitude de ses composantes, c'est-à-dire limiter les excitations, il y a plusieurs voies de travail et notamment :

– **augmenter la longueur de la bielle** (le rapport $\lambda = L/R$ devenant plus grand, on limite l'influence de certains harmoniques), mais cela pose notamment des problèmes d'encombrement, de poids et de résistance de la bielle en flambage, voire de fréquence propre en torsion ;

Tableau 1 – Bilan des forces et moments appliqués au bloc-moteur

Force/ moment	Nature	Axe	Équilibrage	Harmonique											
Force résultante	Inertie $F_{i/alt}$ (fonction de ω)	Oz	Équilibrable	H1		H2					H4				H6
	Rotative $F_{i/rot}$ (fonction de ω)	Autour de Ox	Équilibrable	H1											
Moment résultant	Inertie $M_{i/alt}$ (fonction de ω)	Ox	Non équilibrable sauf cas particulier (ordre 2 par méthode de Lanchester)	H1		H2					H4				H6
	Gaz M_g (fonction de la charge)	Ox	Non équilibrable	H0,5	H1	H1,5	H2	H2,5	H3	H3,5	H4	H4,5	H5	H5,5	H6

Tableau 2 – Amplitudes des forces et moments

Nature de l'excitation				Remarques
Tamis (dû à $F_{i/rot}$) $-m_{rot} \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \sin \alpha$ selon Oy				Possibilités d'équilibrage
Pilon $F_{i/v}$ (dû à $F_{i/alt}$ et $F_{i/rot}$)				Possibilités d'équilibrage
Ordre 1	Ordre 2	Ordre 4	Ordre 6	
$(m_{alt} + m_{rot}) \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha$	$\frac{1}{\lambda} \cdot m_{alt} \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos 2\alpha$	$\frac{-1}{4\lambda^3} \cdot m_{alt} \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos 4\alpha$	$\frac{9}{128\lambda^5} \cdot m_{alt} \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos 6\alpha$	
Pas de galop				
Pas de lacet				–
Roulis M_r (dû à $M_{i/alt}$ et M_{gaz})				Non équilibrable (sauf éventuellement H2 dû à l'inertie)
$F_g \cdot R \cdot \left\{ \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2\lambda} \right\} + m_{alt} \cdot R^2 \cdot \omega^2 \cdot \left\{ -\frac{\sin \alpha}{4\lambda} + \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{3\sin 3\alpha}{4\lambda} + \frac{\sin 4\alpha}{4\lambda^2} \right\}$				

– **réduire les masses alternatives**, mais le gain n'est pas très important ;

– **augmenter l'inertie du bloc moteur**, ce qui n'est évidemment pas une bonne voie puisqu'au contraire, on fait la « chasse » aux kilos superflus (pour des raisons de réduction de consommation par diminution de la masse transportée) ;

– **diminuer le régime** (les forces et moments d'inertie sont en effet fonction de ω^2), ce qui n'est pas non plus la tendance actuelle à l'heure des moteurs de type multisoupapes et turbo à géométrie variable qui ont pour objet d'offrir au client une large plage d'utilisation ;

– **augmenter le nombre de cylindres** et les combiner de manière à annuler leurs contributions, en particulier sur les harmoniques d'ordre faible, mais ceci au détriment du facteur coût ;

– **travailler sur le profil de l'évolution de pression** pour limiter l'acyclisme ou le moment de roulis.

On peut percevoir que diminuer les excitations n'est pas chose facile et que l'optimisation des prestations vibratoires du moteur ne doit pas se faire au détriment des performances de celui-ci.

3. Équilibrage du moteur monocylindre

Les masses rotatives et alternatives du moteur monocylindre sont à l'origine de vibrations en pilon et tamis (figure 2). L'amplitude de ces vibrations peut être limitée en effectuant un équilibrage adapté. Ce dernier n'est pas toujours possible, et quand il l'est, il est rarement facile à mettre en œuvre.

Nous donnons dans ce paragraphe quelques éléments de base relatifs à l'équilibrage du moteur monocylindre qui seront utiles, en les adaptant, pour l'étude des moteurs multicylindres.

3.1 Équilibrage des masses rotatives

Nous rappelons ici sans les justifier les définitions de base de l'équilibrage. Le lecteur peut se tourner vers des ouvrages spécia-

lisés pour appréhender le sujet de façon plus détaillée (par exemple [6]).

Les trois définitions d'équilibrage à savoir sont les suivantes :

– un solide est **équilibré statiquement** si son centre de gravité G est situé sur l'axe de rotation ;

– un solide est **équilibré dynamiquement** si son axe de rotation est un axe principal d'inertie du solide ;

– un **équilibrage est dit « complet »** lorsqu'il est assuré à la fois statiquement et dynamiquement.

La figure 25 présente des exemples de différents états d'équilibrage d'un solide.

La figure 26 montre le principe de l'équilibrage avec deux masses ajoutées m_1 et m_2 . Le centre de gravité G de l'arbre de masse m , situé à la distance a de l'axe de rotation de l'arbre, est équilibré grâce à deux masses m_1 et m_2 .

L'équilibrage statique exige que le centre de gravité de l'ensemble arbre et masses additionnelles soit situé sur l'axe de rotation, soit :

$$\frac{m \cdot \overline{OG} + m_1 \cdot \overline{OG}_1 + m_2 \cdot \overline{OG}_2}{m + m_1 + m_2} = \vec{0} \quad (63)$$

Cette relation vectorielle projetée sur les axes Oy et Oz donne respectivement :

$$\begin{aligned} m \cdot a + m_1 \cdot a_1 \cdot \cos \alpha_1 + m_2 \cdot a_2 \cdot \cos \alpha_2 &= 0 \\ m_1 \cdot a_1 \cdot \sin \alpha_1 + m_2 \cdot a_2 \cdot \sin \alpha_2 &= 0 \end{aligned} \quad (64)$$

L'équilibrage dynamique implique que :

$$\sum_i m_i \cdot \overline{OA_i} \wedge \overline{OG_i} = \vec{0} \quad (65)$$

Cette équation vectorielle projetée respectivement sur les axes Oy et Oz fournit les équations :

$$\begin{aligned} J_{xz} &= m_1 \cdot a_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot a_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot x_2 = 0 \\ J_{xy} &= m \cdot a \cdot x + m_1 \cdot a_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot a_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot x_2 = 0 \end{aligned} \quad (66)$$

Figure 25 – États d'équilibrage d'un solide

Figure 26 – Principe de l'équilibrage avec deux masses ajoutées

Figure 27 – Équilibrage des masses rotatives du moteur monocylindre

Pour équilibrer la masse rotative m_{rot} du moteur monocylindre, on place des masses m_1 et m_2 dans le prolongement des bras de maneton, respectivement à une distance z_1 et z_2 de l'axe de rotation, ainsi qu'on le voit sur la figure 27.

En se servant des équations (64) et (66), on arrive à (étant entendu que $\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 = 0$ puisque $\alpha_1 = \alpha_2 = 180^\circ$) :

$$\begin{aligned} m_{rot} \cdot R - m_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot z_2 &= 0 \\ -m_1 \cdot z_1 \cdot \left(-\frac{l}{2}\right) - m_2 \cdot z_2 \cdot \left(\frac{l}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (67)$$

On voit qu'il y a une infinité de solutions possibles au système (67). Mais en général, on choisit $m_1 = m_2 = m_c$, ce qui conduit à $z_1 = z_2 = z_c$ et $m_c \cdot z_c = \frac{m_{rot} \cdot R}{2}$.

Bien entendu, la distance z_c est fonction de la place disponible. Quand on le peut, on fait en sorte que la distance z_c soit la plus grande possible pour minimiser m_c et donc la masse du vilebrequin.

3.2 Équilibrage des masses alternatives

Comme nous l'avons vu, la force d'inertie alternative $F_{i/alt}$ est une fonction de α périodique de période 2π . Pour pouvoir l'équilibrer, il faut la décomposer en une somme de forces sinusoïdales qu'il est théoriquement possible d'équilibrer séparément. Nous redonnons cette décomposition repérée précédemment par la relation (31) :

$$F_{i/alt} \approx m_{alt} \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \left[\cos \alpha + \frac{\cos 2\alpha}{\lambda} + \frac{\cos 4\alpha}{4\lambda^3} - \frac{\cos 4\alpha}{4\lambda^3} + \dots \right] \quad (68)$$

Faisons un petit rappel théorique pour comprendre les choses [7]. Comme l'expression (68) le montre, la force alternative d'ordre 1 est $m_{alt} \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha$.

Comme $\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$, cette force peut être décomposée en 2 forces centrifuges provoquées par 2 masses égales à $m_{alt}/2$, symétriques par rapport à Oz, d'amplitude $m_{alt}/2 \cdot R \cdot \omega^2$, et tournant en sens inverse, l'une à $+\omega$ et l'autre à $-\omega$, ainsi qu'on le voit sur la figure 28.

L'effort de pilon d'ordre 2 est donné par :

$$F_{i/alt} \approx \frac{m_{alt}}{2} \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{4\lambda^3} + \frac{15}{128\lambda^5} \right) \cdot (e^{2i\alpha} + e^{-2i\alpha}) \quad (69)$$

On peut l'équilibrer en plaçant deux masses se déplaçant en opposition avec le piston, l'une tournant à $+2\omega$ et l'autre à -2ω . Pour compenser l'impact de la vitesse de rotation sur l'amplitude de la force centrifuge (en ω^2), les masses tournantes auront pour valeur $\frac{m_{alt}}{8} \cdot \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{4\lambda^3} + \dots \right)$.

De façon pratique, on n'équilibre jamais les forces de pilon d'ordre 4 ou supérieur, car d'une part, l'amplitude de ces efforts ne le justifie pas, et d'autre part, c'est technologiquement très difficile.

S'agissant de la force de pilon d'ordre 1, plusieurs méthodes sont possibles :

- la plus efficace consiste à installer des arbres d'équilibrage placés symétriquement de part et d'autre du vilebrequin, chacun portant une masse rotative égale à $m_{alt}/2$. Cette traduction directe du principe d'équivalence entre une masse alternative et deux masses rotatives est représentée sur la figure 29. Cependant, la mise en place de 2 lignes d'arbre entraînées par engrenages ou chaînes implique une **augmentation d'encombrement, de masse, de bruit, de frottements et de coût** ;

- on peut aussi ne conserver qu'un seul arbre d'équilibrage (celui qui tourne en sens inverse du vilebrequin) portant $m_{alt}/2$. La

deuxième masse $m_{alt}/2$ est installée sur le vilebrequin sous la forme de deux masselottes $m_{alt}/4$ placées dans le prolongement des bras de manetons, venant ainsi s'ajouter aux contrepoids qui équilibrent les masses rotatives. L'effort de pilon est parfaitement équilibré, mais on génère un moment de roulis (qui s'ajoute au moment de roulis naturel du moteur), lequel peut être limité en rapprochant au maximum l'axe de l'arbre primaire de celui du vilebrequin ;

- il est enfin possible de supprimer l'arbre primaire de la méthode précédente. Selon la valeur des contrepoids solidaires du vilebrequin, la force de pilon d'ordre 1 est totalement ou partiellement équilibrée, mais on crée des forces de tamis plus ou moins importantes.

Pour équilibrer la force de pilon d'ordre 2, on peut là encore utiliser l'équivalence entre une masse alternative et deux masses rotatives. La figure 30 montre un exemple de réalisation technologique de ce principe.

Figure 28 – Équivalence entre une masse alternative et deux masses rotatives

Figure 29 – Moteur monocylindre équipé de 2 arbres d'équilibrage

Figure 30 – Équilibrage de la force de pilon d'ordre 2 par deux arbres d'équilibrage (cas du moteur monocylindre)

Dans la disposition précédente, les masses sont symétriques par rapport au plan vertical passant par l'axe du vilebrequin, ce qui ne crée aucun moment de roulis. Mais en réalité, on a intérêt à créer un moment de roulis pour équilibrer le roulis naturel du moteur, lui-même d'ordre 2. Pour cela, on utilise la **méthode de Lanchester** qui reprend la disposition précédente, mais en décalant vers le haut l'une des deux masses et vers le bas l'autre masse. L'équilibrage du moment de roulis naturel du moteur n'est que partiel s'agissant du moteur monocylindre (la méthode de Lanchester est plus adaptée au moteur à 4 cylindres).

4. Conclusion

Les principales idées à retenir de cette étude consacrée à l'analyse du comportement cinématique et dynamique d'un moteur monocylindre sont :

- les approches d'ordre 1, bien qu'imparfaites, permettent d'estimer rapidement et simplement les excitations et irrégularités de rotation auxquelles est soumis le GMP ;
- le couple gaz d'un monocylindre est régi par une équation du type :

$$C_{vg} \approx -F_g \cdot R \cdot \left\{ \sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2\lambda} \right\},$$

avec F_g poussée des gaz sur le piston fonction de l'angle vilebrequin ;

- le couple d'inertie induit par le mouvement de la masse alternative d'un monocylindre vaut :

$$C_{vi} \approx -m_{alt} \cdot R^2 \cdot \omega^2 \cdot \left(-\frac{\sin \alpha}{4\lambda} + \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{3\sin 3\alpha}{4\lambda} + \frac{\sin 4\alpha}{4\lambda^2} \right);$$

- les acyclismes en accélération angulaire d'un moteur monocylindre peuvent être approchés par une relation du type :

$$I_v \cdot \ddot{\alpha} = C_m = C_{vg} + C_{vi},$$

avec I_v inertie des parties tournantes,

α exprimé ici en accélération angulaire ;

- les contenus harmoniques des excitations du GMP sont riches, le couple moteur C_m comprend tous les harmoniques multiples de 0,5.

5. Glossaire

acyclisme

Non-uniformité de rotation du vilebrequin pendant un cycle de fonctionnement.

effort des gaz

Effort généré par la pression variable des gaz sur le piston.

effort d'inertie

Effort généré par les accélérations des pièces en mouvement (piston bielle...).

ratio lambda ou λ ; λ ratio

Ratio représentant le rapport de la longueur de l'entraxe de bielle sur la demi-course du piston. Très employé par les motoristes car il intervient dans de nombreuses expressions d'efforts, de couples, de vitesses, d'accélérations caractérisant les moteurs thermiques.

volant d'inertie ; *wheel inertia*

Inertie rotative attachée au vilebrequin visant à réduire son acyclisme.

6. Symboles

Symbole	Description	Unité
A_i	Coefficient de Fourier en cos	selon nature du signal
B_i	Coefficient de Fourier en sin	selon nature du signal
C	Course du piston (= $2R$)	mm
C_m	Couple appliqué au vilebrequin (superposition du couple dû aux gaz C_{vg} et du moment dû à l'inertie C_{vi})	N.m
C_{vg}	Couple moteur dû à la poussée des gaz appliqué au vilebrequin par le biais du piston et de la bielle	N.m
C_{vi}	Couple inertiel appliqué au vilebrequin	N.m
d	Bras de levier	mm
f_{Hn}^N	Fréquence de l'harmonique Hn pour une vitesse de rotation N	Hz
F_b	Force bielle (composition de F_{bg} et F_{bi})	N
F_{bg}	Force due à la poussée des gaz appliquée à la bielle	N
F_{bi}	Force d'inertie dans l'axe de la bielle	N
F_i	Composition de $F_{i/alt}$ et $F_{i/rot}$	N
F_g	Force due à la poussée des gaz appliquée à la culasse (aussi appliquée à la face « feu » du piston)	N
$F_{i/alt}$	Force d'inertie alternative verticale	N
$F_{i/h}$	Composante horizontale de la force F_i	N
$F_{i/rot}$	Force d'inertie rotative	N
$F_{i/v}$	Composante verticale de la force F_i	N
F_t	Force transversale exercée par le piston sur la chemise (composition de F_{ti} et F_{tg})	N
F_{tg}	Force transversale due aux gaz appliquée sur la chemise par le piston	N
F_{ti}	Force transversale due à l'inertie appliquée sur la chemise par le piston	N

Symbole	Description	Unité
H_n	Harmonique d'ordre n	–
I_r	Moment d'inertie en roulis du moteur	kg.m ²
I_v	Moment d'inertie de l'ensemble des masses rotatives	kg.m ²
$J_{xy} J_{xz}$	Produits d'inertie de la matrice d'inertie	kg.m ²
k	Raideur en torsion du GMP sur ses tampons	N.m.rad ⁻¹
L	Entraxe de bielle	mm
m	Masse de contrepoids	kg
m_{alt}	Masse alternative de la bielle	kg
m_b	Masse de la bielle	kg
m_m	Masse du maneton	kg
m_p	Masse du piston	kg
m_{rot}	Masse rotative de la bielle	kg
M	Masse du GMP	kg
M_{alt}	Masse alternative du moteur complet	kg
M_{rot}	Masse rotative du moteur complet	kg
M_g	Moment des gaz dû à la poussée latérale du piston sur le bloc-moteur	N.m
$M_{i/alt}$	Moment d'inertie appliqué au bloc moteur	N.m
M_r	Moment de roulis global appliqué au bloc moteur (superposition du moment dû aux gaz M_g et du moment d'inertie $M_{i/alt}$)	N.m
N	Régime moteur	tr.min ⁻¹

Symbole	Description	Unité
O_x, O_y, O_z	Axes du repère	
P	Pression dans la chambre de combustion	MPa
P_0	Pression moyenne de combustion sur le cycle	MPa
P_a	Pression relative des gaz dans la chambre	MPa
P_{sp}	Pression sous le piston	MPa
R	Longueur de la manivelle ou distance axe tourillon-axe maneton	mm
v_A	Vitesse du piston	m.s ⁻¹
z	Déplacement vertical du centre de gravité du moteur	mm
α	Angle de rotation du vilebrequin compté à partir du PMH	rad
α_i	Angle de positionnement du contrepoids i	rad
β	Angle de basculement de la bielle par rapport à la verticale	rad
γ_A	Accélération verticale du piston	m.s ⁻²
γ_v	Accélération verticale du GMP	m.s ⁻²
$\lambda = L/R$	Rapport de l'entraxe de la bielle sur la demi-course ($\lambda = L/R$)	–
ϕ	Mouvement angulaire du moteur autour de son axe d'inertie	rad
$\emptyset$	Alésage	mm
ω	Vitesse de rotation du vilebrequin, constante	rad.s ⁻¹

Acyclisme des moteurs thermiques

Forces, couples et moments appliqués au moteur monocylindre

par **Elia BARON**

Ingénieur-Docteur
Expert Chaîne Cinématique, Renault Automobiles
Guyancourt, France

et **Jean-Louis LIGIER**

Ingénieur-Docteur
Professeur de Mécanique
HEIG-VD, Yverdon, Suisse

Sources bibliographiques

- [1] XUE-LAI (L.), WEN-BIN (S.), XINGJIAN (J.) et WAIZUDDIN (A.). – *Vibration isolation analysis of clutches based on trouble shooting of vehicle accelerating noise*, Journal of Sound and Vibration 382, pp. 84-99 (2016).
- [2] LIGIER (J.-L.) et BARON (E.). – *Acyclisme et vibrations*, 2 volumes, 875 pages, Technip (2002).
- [3] OSBURN (A.W.), KOSTEK (T.M.) et FRANCHEK (M.A.). – *Residual generation and statistical pattern recognition for engine misfire diagnostics*, Mechanical Systems and Signal Processing 20, pp. 2232-2258 (2006).
- [4] GUNSTON (B.). – *World Encyclopaedia of Aero Engines*, Patrick Stephens Ltd (1995).
- [5] <http://www.aeronavale-porteavions.com/viewtopic.php?f=73&t=2293>
- [6] SCHNEIDER (H.). – *Technique d'équilibrage*, Springer (2010).
- [7] SWOBODA (B.). – *Mécanique des moteurs alternatifs*, Technip (1984).

À lire également dans nos bases

GRATADOUR (M.). – *Moteurs thermiques – Introduction aux moteurs alternatifs* [B 2500] (1995).

Normes et standards

NF ISO 1204	1999	Moteurs alternatifs à combustion interne – Désignation du sens de rotation et des cylindres et des soupapes dans les culasses, et définition des moteurs en ligne à droite et à gauche et des emplacements sur un moteur.	NF ISO 7967-1	2005	Moteurs alternatifs à combustion interne – Vocabulaire des composants et des systèmes – Partie 1 : « structure du moteur et de ses capotages »
NF ISO 3046-3	2006	Moteurs alternatifs à combustion interne – Performances – Partie 3 : mesurages pour les essais.	NF ISO 7967-2	2011	Moteurs alternatifs à combustion interne – Vocabulaire des composants et des systèmes – Partie 2 : mécanismes principaux
NF ISO 3046-4	2010	Moteurs alternatifs à combustion interne – Performances – Partie 4 : régulation de la vitesse	NF R11-101	1989	Moteurs alternatifs à combustion interne – Carter de volant moteur – Dimensions nominales et tolérances
NF ISO 3046-5	2002	Moteurs alternatifs à combustion interne – Performances – Partie 5 : vibrations de torsion	NF ISO 15550	2002	Moteurs à combustion interne – Détermination et méthode de mesure de la puissance du moteur – Exigences générales

Annuaire

Comatec, Heig-Vd, 1 route de Cheseaux, 1400 Yverdon-les-bains, Suisse.
Analyse dynamique et acyclisme.

Annexe : Cinématique du piston

Le mouvement du piston dans un cylindre théorique sans jeu et par voie de conséquence sans basculement de piston est piloté par le mouvement de la bielle. Or le mouvement de cette dernière peut être décomposé en un mouvement de translation, imposé par le cylindre, et un mouvement pendulaire autour du pied de bielle. La figure 1 schématise le système.

1 – Translation du piston

La translation du piston est décrite par le mouvement du point A le long de l'axe Oz. Ainsi, en projection sur les axes Oz et Oy, on obtient par des considérations géométriques :

$$\begin{aligned} R \cdot \cos \alpha + L \cdot \cos \beta &= OA \\ R \cdot \sin \alpha + L \cdot \sin \beta &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

En posant $\lambda = L/R$, on peut exprimer la distance OA sous la forme :

$$OA = R \cdot \cos \alpha + L \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \beta} \quad (2)$$

D'après (1), on a $\sin \beta = -\frac{R}{L} \cdot \sin \alpha$. Ainsi, en posant $\lambda = L/R$, (2) peut s'écrire :

$$OA = R \cdot \cos \alpha + L \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\lambda^2}} \quad (3)$$

En se souvenant que, pour x inférieur à 1, on peut écrire sous la forme d'un développement limité la quantité suivante :

$$(1 - x)^{1/2} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + g(x^3) \quad (4)$$

et en remarquant que, dans notre cas, x est petit (car en général, $3 < \lambda < 4$), on obtient :

$$OA = R \cdot \cos \alpha + L \cdot \left\{ 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{2\lambda^2} - \frac{\sin^4 \alpha}{8\lambda^4} + g\left(\frac{\sin^6 \alpha}{\lambda^6}\right) \right\} \quad (5)$$

avec $g\left(\frac{\sin^6 \alpha}{\lambda^6}\right)$ erreur commise inférieure à $\left(\frac{1}{\lambda^6} < 0,0014\right)$.

En trigonométrie, la formule de Moivre nous donne :

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha \\ \sin^4 \alpha &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{8} \cos 4\alpha \end{aligned} \quad (6)$$

L'expression approchée de la distance OA est donc :

$$OA = R \cdot \cos \alpha + L \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{3}{64\lambda^4} \right\} + L \cdot \left\{ \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{16\lambda^4} \right\} \cdot \cos 2\alpha - L \cdot \frac{1}{64\lambda^4} \cdot \cos 4\alpha \quad (7)$$

Figure 1 – Système bielle-manivelle

Pratiquement, on peut accepter l'approximation suivante où l'erreur est au plus de l'ordre de 0,2 % pour l'angle α le plus défavorable et pour des moteurs automobiles de tourisme :

$$OA \approx L + R \cdot \left\{ \cos \alpha + \frac{1}{4\lambda} \cdot \cos 2\alpha \right\} \quad (8)$$

Sur la figure 2, on a tracé le déplacement du piston (point A) en fonction de l'angle vilebrequin, le point mort haut étant pris comme origine. Les valeurs approchée et exacte sont respectivement les expressions (8) et (2). La bielle de longueur infinie modélise ce que serait le déplacement de A sans superposition du mouvement pendulaire.

Le terme « correctif » $\frac{1}{4\lambda} \cdot \cos 2\alpha$ se trouve ainsi annulé dans l'expression (8).

L'observation des courbes précédentes montrent que l'approximation (8) est bien visuellement justifiée pour une approche d'ordre 1.

2 – Vitesse du piston

La vitesse du piston, ou vitesse du point A, est donnée par :

$$v_A = \frac{dOA}{dt} = \frac{dOA}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} \quad (9)$$

avec $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$ vitesse angulaire du maneton (point M).

Pour une vitesse de rotation ω constante, la valeur exacte de la vitesse du piston est donnée par :

$$v_A = \omega \cdot \left\{ -R \cdot \sin \alpha - \frac{L}{\lambda^2} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\lambda^2}}} \right\} \quad (10)$$

La valeur approchée est plus intéressante pour appréhender le contenu harmonique. On a tout d'abord, en dérivant l'expression (7) par rapport à l'angle α :

$$\begin{aligned} \frac{dOA}{d\alpha} &= -R \cdot \sin \alpha - 2L \cdot \left\{ \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{16\lambda^4} + \frac{15}{512\lambda^6} \right\} \cdot \sin 2\alpha \\ &\quad + 4L \cdot \left\{ \frac{1}{64\lambda^4} + \frac{3}{256\lambda^6} \right\} \cdot \sin 4\alpha \\ &\quad - 6L \cdot \frac{1}{512\lambda^6} \cdot \sin 6\alpha \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

soit comme expression de la vitesse du piston :

$$v_A = R \cdot \omega \cdot \left\{ -\sin \alpha - \left(\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{8\lambda^3} + \frac{15}{256\lambda^5} \right) \cdot \sin 2\alpha + \left(\frac{1}{16\lambda^3} + \frac{3}{65\lambda^5} \right) \cdot \sin 4\alpha - \frac{3}{256\lambda^5} \cdot \sin 6\alpha + \dots \right\} \quad (12)$$

Figure 2 – Déplacement du piston

Comme précédemment, on peut se contenter de l'approximation suivante, dont l'erreur relative est au plus de 1 % pour les moteurs d'automobiles de tourisme :

$$v_A \approx -R \cdot \omega \cdot \left\{ \sin \alpha + \frac{1}{2\lambda} \cdot \sin 2\alpha \right\} \quad (13)$$

La vitesse du piston est nulle pour $\alpha = 0$ (PMH) et $\alpha = \pi$ (PMB), elle est maximale quand :

$$\frac{dv_A}{d\alpha} = -R \cdot \omega \cdot \left\{ \cos \alpha + \frac{1}{\lambda} \cdot \cos 2\alpha \right\} = 0 \quad (14)$$

ce qui revient à résoudre :

$$2 \cos^2 \alpha + \lambda \cdot \cos \alpha - 1 = 0 \quad (15)$$

d'où :

$$\cos \alpha = -\frac{\lambda}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + 2} \quad (16)$$

Pour $\lambda = 3,35$, on obtient $\cos \alpha = 0,25$ ou $\cos \alpha = -1,93$, la première solution étant évidemment la seule possible. L'angle pour lequel la vitesse du piston est extrême (vitesse négative) est donc égal à $75,5^\circ$ et $-75,5^\circ$ modulo 2π . En effectuant le calcul exact avec l'expression de la vitesse (10), on obtient les angles de $74,6^\circ$ et $-74,6^\circ$ modulo 2π .

En pratique, on retient que la vitesse du piston est maximale quand la bielle est perpendiculaire à la manivelle, c'est-à-dire quand $\tan \alpha = \lambda$. Pour $\lambda = 3,35$, on trouve un angle d'environ $73,5^\circ$, ce qui n'est pas très éloigné de la valeur exacte de $74,6^\circ$ précédemment calculée.

Sur la figure 3, on a tracé la vitesse du piston en fonction de l'angle vilebrequin, pour 1 000 tr.min⁻¹ et 4 500 tr.min⁻¹. Les valeurs exacte et approchée sont respectivement les expressions (10) et (13).

On notera que les deux expressions ne se distinguent pas sur les graphiques, ce qui justifie visuellement l'emploi de la valeur approchée. La bielle de longueur infinie modélise ce que serait la vitesse de A sans superposition du mouvement pendulaire.

Pour cette bielle particulière, le terme « correctif » $\frac{1}{2\lambda} \cdot \sin 2\alpha$ se trouve ainsi annulé dans l'expression (13).

3 – Accélération du piston

L'accélération du piston est donnée par :

$$\gamma_A = \frac{d^2 OA}{dt^2} = \frac{dv_A}{dt} = \frac{dv_A}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} \quad (17)$$

Lorsque la vitesse de rotation est constante, la valeur exacte de l'accélération du piston est donnée par :

$$\gamma_A = \omega^2 \cdot \left\{ -R \cdot \cos \alpha - \frac{L}{\lambda^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\lambda^2}}} \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\lambda^2 \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\lambda^2}\right)} \right\} \quad (18)$$

Figure 3 – Vitesse du piston

On peut utiliser aussi la valeur approchée. Compte-tenu de (17) et (12), elle est donnée par :

$$\gamma_A = R \cdot \omega^2 \cdot \left\{ -\cos \alpha - \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{4\lambda^3} + \frac{15}{128\lambda^5} \right) \cdot \cos 2\alpha + \left(\frac{1}{4\lambda^3} + \frac{3}{16\lambda^5} \right) \cdot \cos 4\alpha - \frac{9}{128\lambda^5} \cdot \cos 6\alpha + \dots \right\} \quad (19)$$

Pratiquement, l'accélération du pied de bielle est donnée par :

$$\gamma_A \approx -R \cdot \omega^2 \cdot \left\{ \cos \alpha + \frac{1}{\lambda} \cdot \cos 2\alpha \right\} \quad (20)$$

Le premier terme correspond à l'accélération du piston avec une bielle de longueur infinie, le deuxième terme étant un terme correctif.

Les accélérations au PMH et au PMB sont respectivement données par :

$$(\gamma_A)_{PMH} = -R \cdot \omega^2 \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{\lambda} \right\} \quad (21)$$

$$(\gamma_A)_{PMB} = -R \cdot \omega^2 \cdot \left\{ -1 + \frac{1}{\lambda} \right\}$$

L'intensité de l'accélération au PMH est donc supérieure à l'accélération au PMB. Par exemple, pour $\lambda = 3,35$, on a

$$\left| \frac{(\gamma_A)_{PMH}}{(\gamma_A)_{PMB}} \right| = 1,85 \quad (22)$$

Cette différence est l'une des sources des forces de pilon.

L'accélération est maximale pour $\alpha = 0$, donc au PMH, et minimale pour $\cos \alpha = \frac{1}{\lambda}$.

Sur la figure 4, on a tracé l'accélération du piston en fonction de l'angle vilebrequin, pour 1 000 tr.min⁻¹ et 4 500 tr.min⁻¹. Les valeurs exacte et approchée sont respectivement les expressions (18) et (20).

On notera que les deux expressions ne se distinguent pas sur les graphiques, ce qui justifie visuellement l'emploi de la valeur approchée. La bielle de longueur infinie correspond à ce que serait l'accélération de A sans superposition du mouvement pendulaire.

Pour cette bielle « infinie », le terme correctif $\frac{1}{\lambda} \cdot \cos 2\alpha$ se trouve ainsi annulé dans l'expression (20)

Figure 4 – Accélération du piston

GAGNEZ DU TEMPS ET SÉCURISEZ VOS PROJETS EN UTILISANT UNE SOURCE ACTUALISÉE ET FIABLE

Techniques de l'Ingénieur propose la plus importante collection documentaire technique et scientifique en français !

Grâce à vos droits d'accès, retrouvez l'ensemble des **articles et fiches pratiques de votre offre**, **leurs compléments et mises à jour**, et bénéficiez des **services inclus**.

RÉDIGÉE ET VALIDÉE
PAR DES EXPERTS

MISE À JOUR
PERMANENTE

100 % COMPATIBLE
SUR TOUS SUPPORTS
NUMÉRIQUES

SERVICES INCLUS
DANS CHAQUE OFFRE

- + de 350 000 utilisateurs
- + de 10 000 articles de référence
- + de 80 offres
- 15 domaines d'expertise

- ☐ Automatique - Robotique
- ☐ Biomédical - Pharma
- ☐ Construction et travaux publics
- ☐ Électronique - Photonique
- ☐ Énergies
- ☐ Environnement - Sécurité
- ☐ Génie industriel
- ☐ Ingénierie des transports
- ☐ Innovation
- ☐ Matériaux
- ☐ Mécanique
- ☐ Mesures - Analyses
- ☐ Procédés chimie - Bio - Agro
- ☐ Sciences fondamentales
- ☐ Technologies de l'information

**Pour des offres toujours plus adaptées à votre métier,
découvrez les offres dédiées à votre secteur d'activité**

Depuis plus de 70 ans, Techniques de l'Ingénieur est la source d'informations de référence des bureaux d'études, de la R&D et de l'innovation.

www.techniques-ingenieur.fr

CONTACT : Tél. : + 33 (0)1 53 35 20 20 - Fax : +33 (0)1 53 26 79 18 - E-mail : infos.clients@teching.com

LES AVANTAGES ET SERVICES compris dans les offres Techniques de l'Ingénieur

ACCÈS

Accès illimité aux articles en HTML

Enrichis et mis à jour pendant toute la durée de la souscription

Téléchargement des articles au format PDF

Pour un usage en toute liberté

Consultation sur tous les supports numériques

Des contenus optimisés pour ordinateurs, tablettes et mobiles

SERVICES ET OUTILS PRATIQUES

Questions aux experts*

Les meilleurs experts techniques et scientifiques vous répondent

Articles Découverte

La possibilité de consulter des articles en dehors de votre offre

Dictionnaire technique multilingue

45 000 termes en français, anglais, espagnol et allemand

Archives

Technologies anciennes et versions antérieures des articles

Impression à la demande

Commandez les éditions papier de vos ressources documentaires

Alertes actualisations

Recevez par email toutes les nouveautés de vos ressources documentaires

*Questions aux experts est un service réservé aux entreprises, non proposé dans les offres écoles, universités ou pour tout autre organisme de formation.

ILS NOUS FONT CONFIANCE

www.techniques-ingenieur.fr

CONTACT : Tél. : + 33 (0)1 53 35 20 20 - Fax : +33 (0)1 53 26 79 18 - E-mail : infos.clients@teching.com